كراســـات الثقافة العلميــة

قصة الرياضيات

"إن كل حقبة فى تقدم العلم
سبقها فترة مخاض وإعداد ...."

دكتور / وليم عبيد

قصــــة الرياضيــات

إن كل حقبة فى تقدم العلم

سبقها فترة مخاض وإعداد...»

دكتور وليم عبيد

أستاذ تعليم الرياضيات

كلية التربية — جامعة عين شمس

عضو المجالس القومية المتخصصة



الناشر

المكتبة الاكاديمية

شركة مساهمة مصرية

٢٠٠٩

حقوق النشر

الطبعة الأولى ٢٠٠٩م – ١٤٣٠هـ

المكتبـــة الأكاديميـــة

شركة مساهمة مصرية

رأس المال المصدر والمدفوع ٩,٩٧٣,٨٠٠ جنيه مصرى

١٢١ شارع التحرير – الدقى – الجيزة

القاهرة – جمهورية مصر العربية

تليفون: ٣٧٤٨٥٢٨٢–٣٣٣٦٨٢٨٨(٢٠٢)

فاكس : ٣٧٤٩١٨٩٠ (٢٠٢)

إهداء

إلى أحفادى

(رامى، فادى)، (مورا، ماريا)، (كريم، نور)

كراسات الثقافة العلمية

هذه السلسلة :

تمثل تلبية صادقة للمساهمة فى الجهود التى تعنى بتيسير المعارف والمفاهيم العلمية لقراء العربية. إن هذا المجال المهم، الذى نأمل أن يساعد فى إدماج ثقافة العلم ومنهجه فى نسيج الثقافة العربية، يحتاج إلى طفرة كمية ونوعية هائلة، وإلى فرز للجيد والردىء والنافع وغير النافع، بل وإلى كشف الاتجاهات المعادية للعلم، حتى إن قدمت باسم العلم. إننا ننطلق من قناعة كاملة بتقدير ثقافتنا العربية والإسلامية الأصيلة للعلم والعلماء، ومن استناد إلى تاريخ مشرف للعطاء العلمى المنفتح على مسيرة العطاء العلمى للإنسانية فى الماضى والحاضر والمستقبل، ومن تطلع إلى أن نستعيد القدرة على هذا العطاء كى نشارك فى تشكيل مستقبل البشرية، الذى تلعب فيه الثورة العلمية والتكنولوجية دورًا محوريًّا كقوة دافعة ومؤثرة فى الوعى المعرفى للبشر وفى مجمل أنشطتهم ونوعية

حياتهم، بل وفى قدرتهم على الإمساك بزمام أمورهم. وإذا كنا نؤمن بأهمية تحول مجتمعاتنا العربية إلى مجتمعات علمية فى فكرها وفعلها، فإن ذلك لن يتأتى إلا بنشر واسع ومتميز لثقافة العلم بكل أشكالها. ونأمل أن تكون هذه السلسلة، التى تبنتها المكتبة الأكاديمية، خطوة على هذا الطريق.

هذه الكراسة:

تواكب اتجاه كتب الثقافة العلمية فى العالم إلى الاهتمام بثقافة الرياضيات. فمنذ زمان طويل عبر المفكرون والفلاسفة والعلماء عن أهمية رؤية العالم بعيون الرياضيات، ومع ذلك نلاحظ بشكل عام قلة الأعمال التى تتضمن لهذه الرؤية بأسلوب يناسب القارئ العام، لدرجة أننا نجد فى مقدمات الكتب التى تتعلق بالفيزياء والكيمياء والبيولوجيا تأكيدًا من مؤلفيها أنهم ابتعدوا قدر الإمكان عن المعادلات والمعلومات الرياضية!!! كما أننا نجد شعورًا عامًا بصعوبة هذا المجال وعدم جاذبيته. وهذه كلها أمور بعيدة عن الحقيقة. ومع ذلك

علينا أن نعترف بالوضع الصعب للرياضيات، ليس فقط فى واقعنا الثقافى، ولكن فى واقعنا التعليمى، وهما أمران مترابطان على أية حال. ففى الاختبارات العالمية الأخيرة لمستوى طلاب مختلف الدول فى العلوم والرياضيات، التى تفوق فيها أبناء العديد من الدول الآسيوية، متجاوزين بذلك الدول الغربية، نجد الدول العربية فى المؤخرة. هذا كله يدفعنا إلى الترحيب بكراسة «قصة الرياضيات» التى يقدمها لنا عالم عامل فى حقل تدريس الرياضيات، هو الدكتور وليم عبيد، الأستاذ بكلية التربية جامعة عين شمس، وعضو المجالس القومية المتخصصة. وكلنا ثقة أن أسلوب السهل الممتنع الذى قدم به هذا العمل سيسهم فى إزالة وهم صعوبة وعدم جاذبية هذا المجال الهام، الذى لا يمكن أن يتقدم العلم فى بلد من البلدان دون التمكن منه.

والله الموفق،،

أحمد شوقى

يناير ٢٠٠٩



أينشتاين: عبقرية «الزمان × المكان» (Space-Time)

المحتـوى

الصفحة

الصفحة

ثالثًا: الجبر... والمقابلة

رابعًا: الحسبان: تكامل ثم تفاضل

الصفحة

تقديم

الرياضيات علم حى دائم التطور تزداد أهميته إلى درجة القول بأن الرياضيات أصبحت مركز التطور الحضارى والتكنولوجى المعاصر والمستقبلى، ذلك أن تطبيقاتها وأنماطها أصبحت تغطى كل أنواع الأنشطة فى العلوم الصلبة والعلوم الناعمة... فى الفنون والآداب... فى سوق العمل ومجالات الترويح... فى استراتيجيات العسكر وقرارات الساسة... فى الإنتاج والخدمات. الرياضيات كانت ومازالت نشاطا عملانيا وفكريا يعبر عن ثقافة إنسانية رحبة تتوسع من داخلها لتسهم فى حل مشكلات من خارجها، وتكتشف من خلال نمذجة وتجريد مواقف من خارجها علاقات تثريها من داخلها. لم يعد نشاط الرياضيات قاصرًا على العدد والشكل اللذين كانا مصدرى إلهامها وبذرتى انطلاقها، بل يمتد نشاطها لدراسة العلاقات والأنماط وإلى اشتقاق نتائج من مقدمات. ولم تعد الرياضيات مجرد أرقام ورموز يفهمها قلة

من الناس، بل لغة يتواصل بها ويتعامل معها غالبية البشر ويعمل منطقها ورقمنتها على تيسير عمل الحاسبات وبث واستقبال المعلومات والتواصل بها من خلال الألياف الضوئية ونبض الإلكترون. لم يعد هناك جبر واحد ولا هندسة واحدة بل تعددت «الجبور» وتعددت الهندسات كما تعددت الأبعاد الجبرية والهندسية، وعمل رياضيون معاصرون على توحيد مجالات وفروع الرياضيات فى بنى مجردة مثل الزمرة (Group) والحقل (Field) وفضاء المتجه (Vector space) لها تمثيلاتها فى الفروع المختلفة.

ورغم كل التجريدات الرياضياتية فإن الرياضيات تنصت للطبيعة لترسم لها نماذج وأنموذجات ينبثق منها وعنها حلول لأعقد المشكلات.. تتعامل الرياضيات مع المؤكدات ومع الاحتمالات واللايقينيات... مع مظاهر استاتيكية وأخرى ديناميكية... وفوضوية، تتعامل مع أشكال مثالية منتظمة وأخرى معقدة... مع أبعاد صحيحة وأبعاد كسورية.

ولحسن الحظ فإنه كما وأنه ليس من الضرورى أن يمتلك الشخص طلاقة فى التحدث بلغة دولة أجنبية لكى يعرف أو يثمِّن خصائص أهلها أو يتعامل معهم، فإنه ليس بالضرورة أن يعرف كل القراء رموز وقوانين وتراكيب الرياضيات لكى يتعامل بها ومعها ويتذوق جمالها ويثمن فوائدها.

بعض الرياضيين لم يكونوا أصلاً رياضيين. فيرمات مثلا لم يكن يحترف الرياضيات بل كان يشغل بها أوقات فراغه حين ينتهى من عمله كمستشار قانونى، كثير من الرياضيين كانوا متعددى المواهب مثل ديكارت الذى ألف كتابا (Le Monde) تحدث فيه عن النجوم والقمر وتشريح الإنسان وعلَّم نفسه الطب وابتكر جسما بشريا افتراضيا كنموذج مثالى لما ينبغى أن يكون عليه جسم الإنسان... هيباتيا كانت تدرس إلى جانب الرياضيات الفلك والفلسفة ويقال أنها ابتكرت جهاز لتحلية المياه.

ولكن: أين ومتى بدأت الرياضيات؟

كيف كانت بذورها وكيف سارت مداراتها؟

إنها قصة الرياضيات.

قصة إشراقات فى الإبداع الإنسانى وسيمفونيات فى الإيقاع البشرى.

قصة تكامل فى الحضارات وتلاقح بين الثقافات...

قصة نمذجة وتمثيلات لمعالجة ثوابت... ومتغيرات.



هيباتيا



فرمات

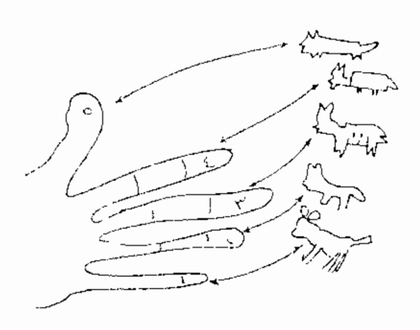


ديكارت

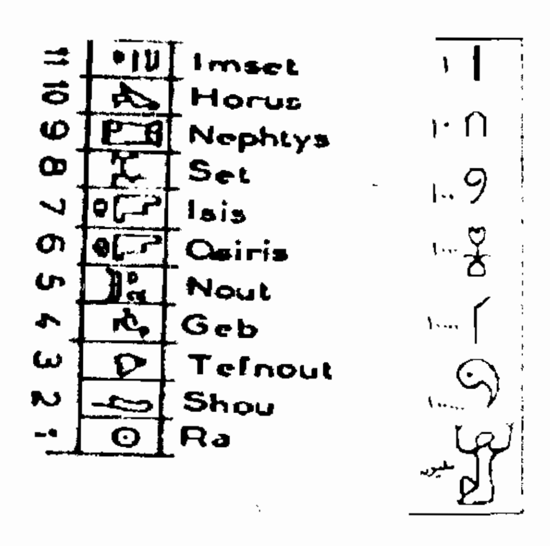


(أولاً) : فى البدء كانت الكلمة... وكان العدد

(١-٠) نشأ العدد من حاجة الإنسان إلى العَدّ... ليعبر عن كَمٍّ، كَمّ ما يمتلكه من أطفال، من زوجات، من أشجار ومزروعات وحيوانات. ابتكر الإنسان رموزا ومسميات لهذه الأعداد اختلفت من ثقافة لثقافة وانتقلت من حضارة لحضارة. كان الإنسان مثلا يحتفظ بسجلات لعدد القطيع الذى يمتلكه بأن يخصص قطعة حصى أو علامة على شجرة لكل واحدة من القطيع، أو كان يحفر شكل أصابع يدٍ أو أوراق نبات تناظر فى مفرداتها عدد ما يملكه. كانت أصابع اليد فى مرحلة ما ترمز إلى الأعداد: من الخنصر (١) إلى الإبهام (٥).



كوَّن البابليون (أهل العراق القدامى) قبل عام ألفين قبل الميلاد نظامًا للعد اعتمد على النظام الستينى (الذى بقى منه تقسيم الساعة والقياس الستينى للزوايا). كان الرمز V يستخدم ليعنى «ستين» وقواها وكانت رموز مثل >> تعنى عشرين... المصريون القدماء ابتكروا نظامًا للعد أساسه عشرة وكانت رموز الأعداد الهيروغليفية كما فى الأمثلة التالية:



(١-١) أرقامنا العربية :

استخدم العرب قديمًا نظامًا عدِّيا مرتبطا بالحروف الأبجدية – شأنهم فى ذلك شأن حضارات قديمة كما فى تمثيل الأعداد بحروف اللغة القبطية وبحروف اللغة اليونانية – كانت الحروف الأبجدية العربية وما يناظرها من أعداد كالآتى:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠
ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ								
١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠	١٠٠٠								

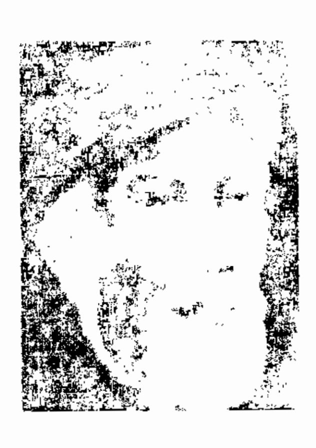
وكان الحساب بها يسمى حساب الجُمَّل فالعدد ٢٠٠٨ مثلاً يمثل بالحروف ح غ غ.

بعد ذلك جاءت الرموز العربية الحالية مستقلة عن الحروف الأبجدية، وجاءت فى صورتين:

الأولى: ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ والتى تستخدم فى المشرق العربى.

والصورة الأخرى: 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، والتى تستخدم فى المغرب العربى ومنها دخلت الأندلس ثم انتشرت فى سائر أوروبا لتحل محل الرموز الرومانية I ، II ، III ، IV ، V ،... X ، C ، L ... وكان دخولها عن طريق كتاب محمد بن موسى الخوارزمى. ويعتقد أن هذه الرموز العربية بصورتيها المشرقية والمغربية من أصل هندى نقلها العرب من خلال ترجمتهم - بناء على أمر الخليفة المنصور (فى العصر العباسى) - لكتاب «السندهند» فى الفلك والرياضيات والذى حمله إلى بغداد عالم فلكى هندى يدعى «كانكاه» وترجمه إلى العربية يعقوب بن طارق المتوفى عام ٧٩٦م وربما آخرون. الصفر كان فى الهند بالصورة (٠) ويطلق عليه «سونيا» بمعنى المكان الخالى وترجمة العرب إلى كلمة صفر التى تحمل لغويا نفس المعنى. هناك ادعاءات أخرى ترى أن الرموز العربية هذه جاءت من فارس أو كابول، وهناك من يرى أنها عربية خالصة ولكن السائد أنها

من أصول هندية. وقد ذكر أبو الريحان البيرونى (من مشاهير الرياضيين العرب فى القرن الحادى عشر الميلادى) أن صور الحروف وأرقام الحساب تختلف فى الهند باختلاف المحلات وأن العرب أخذوا أحسن ما عندهم فهذبوا بعضها



البيرونى (٩٧٣-١٠٤٨)

وكونوا سلسلتين إحداهما عرفت بالأرقام الهندية (١، ٢، ٣...، ٩) ويتضح فى كتابتها الوضع العمودى، والأخرى عرفت بالغبارية (1 ، 2 ، 3 ، ... ، 9) والتى تميل فى كتابتها إلى الوضع الأفقى. ومع دخول الرموز العربية إلى الغرب مصاحبة بطرق الحساب بالنظام العشرى، جرى تيسير إجراء

العمليات الحسابية بالورقة والقلم وذلك بديلاً عن العمليات المعقدة التى كانت تجرى عن طريق المِعداد ورموز الأرقام الرومانية. وقد أطلق الأوروبيون على طرق إجراء العمليات وخطوات حل المسائل باستخدام النظام العربى كلمة ألجوريزم (Algorithm) أو الخوارزمية تكريما لاسم الخوارزمى. وقد تطور معنى الخوارزمية ليشمل برمجة خطوات حل مشكلة أو إجراء أية عملية رياضية بالورقة والقلم أو حاسوبيا.

(١-٢) الفيثاغوريون والعدد:

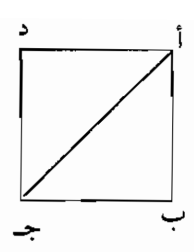
يطلق على مجموعة الأعداد ١، ٢، ٣،... أيا كانت رموزها الأعداد الطبيعية. وكان الرياضيون والفلاسفة ومن أشهرهم فيثاغورس (٥٨٢-٥٠٧ ق.م ؟؟) يعتقدون أن العدد أصل كل الأشياء ومفتاح الكون. وكان لكل عدد معنى ومغنى (خاصية) وأن السماء ليست إلا سلما موسيقيا وعددا،

وأن الحياة عدد ونغم. وقد انشغل بعض العرب (مثل إخوان الصفا وخِلاَّن الوفا) وغيرهم فى العصور الوسطى بدراسة الأعداد وخواصها وتفسيرات ورودها فى بعض النصوص. الإغريق كانوا يعتقدون أن الأعداد ١، ٢، ٣، ٤ تمثل العناصر الأساسية فى تكوين الطبيعة ويرون فيها رباعيا مقدسا يشمل أصل هذا الخلق المتدفق إلى الأبد.

(١-٣) الحاجة إلى مزيد من أنواع الأعداد:

كان من الطبيعى أن يحتاج الإنسان بعد حل مشكلة العَدّ إلى حل مشكلة القياس، وقد بدأ باستخدام أدوات متاحة مثل الذراع والشبر والإصبع... ثم احتاج إلى وحدة قياسية لتركيب وترٍ لقوس الصيد ورأسٍ لفأس الفلاحة أو لخشب قارب الملاحة... ثم كانت حاجته لوحدات أصغر فأصغر فابتكر «الكسور». وكان اعتقاد الفيثاغوريين أنه لا توجد أعداد سوى الأعداد الصحيحة أو الكلية والأعداد الكسرية، وأنه فى حالة وجود «طولين» أو مسافتين فإن أحدهما لابد

وأن يساوى الآخر مضروبا فى
عدد صحيح أو عدد كسرى.
إلا أن أحدهم اكتشف أن
طول قطر مربع مثلاً لا يساوى
طول ضلعه مضروبا فى عدد
صحيح أو كسر. ومن ثم



أجـ ≠ ١ × عدد صحيح أو كسر
(فى المربع أ ب جـ د)

نشأت حاجة (وإن لم يعترف بها الفيثاغوريون) إلى أعداد أخرى التى سميت بعد ذلك بالجذور الصم (مثل $\sqrt{2}$) ثم سميت أعداد غير نسبية. وقد أدى هذا الاكتشاف إلى اهتزاز فى ثقة الفيثاغوريين والإغريق فى الحساب، وحدث عزل بين الحساب والهندسة واكتفى الإغريق بدراسة الهندسة دراسة وصفية. من المعروف أن الكسور ظهرت عند البابليين والمصريين. وفى كتاب أحمس الكاتب المصـــرى (حوالى ١٦٥٠ ق.م) والمعروف باسم بردية رايند (مكتشف المخطوطة فى الأقصر عام ١٨٥٨م) ظهرت مسائل بها كسور

عادية وخاصـــة كسور الوحدة أى الذى يكون البسط فيها هو الواحد الصحيح، وعملية تجزئ أى كسر عادى إلى مجموعة مـــن كسور الوحدة. وقــد ظلت طريقة تجزئ أى كسر إلى كسور الوحدة مستخدمة حتى حوالى القرن العاشر الميلادى حيث استخدمها الرياضى المصـــرى سعدى بن يوسف الفيومى فى حســـاب المواريث حوالى عام ٩٤٠م. جــدير بالإشارة أن الرياضى الإيطالى فيبوناتسى وضع فى القـــــرن الثانى عشــــر الميلادى قاعــدة عامة لتجزئ الكسور هى

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب جـ}} = \frac{1}{\text{ب} \times \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ}}} + \frac{1}{\text{جـ} \times \frac{\text{ب} + \text{جـ}}{\text{أ}}}$$

الكسور العشرية جاءت بعد ظهور نظام العد العربى بحوالى ألف عام. وكان ظهورها مرتبطا بتقريب أعداد صماء مثل $\sqrt{٢}$ ونسبة مثل ط. وعلى الرغم من أن كسور عشرية ظهرت فى أعمال بعض الرياضيين العرب مثل غياث الدين الكاشى (حوالى عام ١٤٣٠م) ورياضيين ألمان مثل رادولف (حوالى عام ١٥٣٠م) إلا أن المؤرخين فى معظمهم ينسبون ابتكار

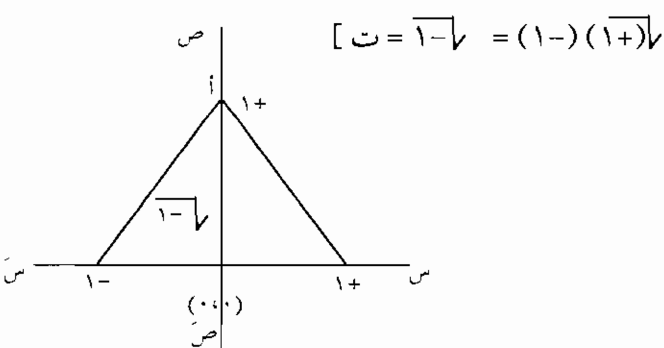
الكسور العشرية إلى الرياضى الهولندى ستيفن (Stevin) الذى نشر فى عام ١٥٨٥م كتابا شرح فيه الكسور العشرية وقواعد العمليات عليها.

الأعداد السالبة نشأت من حاجات رياضية فى حل معادلات مثل س + ١ = ٠ وكانت تهمل قبل ذلك، كذلك الحال بالنسبة للأعداد غير النسبية مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، ومن الحاجة إلى تعميمات فى نظرية حل المعادلات. وبناء نظام الأعداد الحقيقية واكتماله بأعداد غير نسبية مثل ط (Π) ، هـ (e). وقد أدى حل مزيد من المعادلات مثل $س^{٢} = -١$ إلى التوسع فى نظم الأعداد لابتكار الأعداد التخيلية مثل (ت) حيث $ت^{٢} = -١$ ثم الأعداد المركبة أ + ب ت حيث أ عدد حقيقى، ت ب عدد تخيلى... كثير من الأعداد التى استحدثت من حاجات رياضياتية ظلت غير معترف بها طويلاً وكان البعض يعتبرها أعدادا معتلة أو سفسطائية.

مع نهاية القرن الثامن عشر وبداية التاسع عشر وجد «مسَّاح» ترويجى اسمه واصل (Wessel) وأمين مكتبة فرنسى هو أرجاند (Argand) مستقلين أنه يمكن تمثيل الأعداد المركبة بيانيًا.

[فى الشكل أ و هو الوسط الهندسى للمثلث ويساوى

$\sqrt{(+1)(-1)} = \sqrt{-1} =$ ت]



(١-٤) المالانهاية والصراع المعرفى:

هذه الثمانية «النائمة» «∞» ترمز إلى مفهوم رياضى وضعه جون واليس (١٦٥٥) ليعبر به عن المالانهاية (Infinity) أى

ما يتجاوز المحدود والمعدود. إنها رمز لكيان رياضى يعتبر أكبر من أى عدد حقيقى، وهو أيضًا يعتبر عددا كاردينااليا لمجموعة الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، ... والتى لا يوجد نهاية لعناصرها، حيث لكل عنصر فيها تالٍ له، وتستمر فى انسيابها وتتابعها دون حدود فى تناظر أحادى مع نقاط على الخط المستقيم بل فى تناظر أحادى مع مجموعات جزئية منها مثل مجموعات الأعداد الزوجية والتى عددها هو أيضًا لا نهائى



جون واليس (١٦١٦-١٧٠٣)

١	٢	٣	٤	٥	. . ن . . .
↓	↓	↓	↓	↓	↓
٢	٤	٦	٨	١٠	. . ٢ن . . .

ومع هذه اللانهـــاية «الفعلية» (actual) توجـــد أيضًا ما لانهاية «كامنة» (Potential) تتمثل فى انسياب وتتابع غير نمطى كما فى حالة أرقام عشرية تقارب ولكنها لا تصل إلى ٢ مثلا أو إلى العدد ط (Π) الذى مهما طال المطال أو امتد المسار لا نهاية لأرقامه العشرية دون تكرار أو تنميط.

ط = ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢٣٨٤٦٢٦٤٣٣٨٣٢٧٩٥٠٢٨٨٤٠٠٠٠٠٠٠٠

ويمثل العدد ط متسلسلة لا نهائية تقاربية هى

$$\frac{\text{ط}}{٤} = ١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{١١} \cdots \leftarrow \infty$$

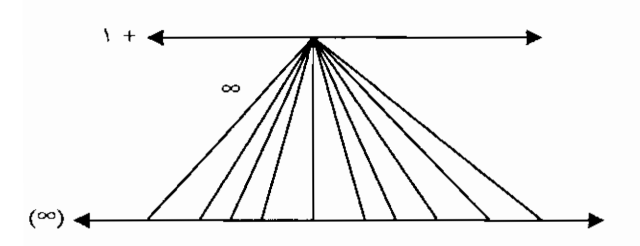
كما تتمثل اللانهاية الكامنة فى متتابعات تتكرر فيها الأرقام العشرية دون توقف مثل المتتابعة: ٠,٣، ٠,٣٣، ٠,٣٣٣، ٠,٣٣٣٣، ٠٠٠٠٠ تسير على درب طويل ونفق لا نهائى، ترى فى نهاية النفق ضوء هو ضوء العدد $\frac{١}{٣}$ ولكنها

لا تصل إليه ولا هو واحد من حدودها ولكنه يصبح ما يسمى نهاية لها (Limit).

كمثال آخر للمالانهاية الكامنة: لنفرض أن هناك «بنكا» يعطى أرباحًا مركبة بنسبة ١٠٠٪ فى السنة وأنه يضيف الأرباح كل لحظة زمنية متناهية فى الصغر. إذا وضعت جنيها واحدا فى هذا البنك فإن جملته فى نهاية العام وبعد تتابع لا نهائى من الإضافات والأرباح المركبة تصبح $\underset{ن \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{١}{ن} \right)^{ن}$ حيث ن عدد اللحظات المتناهية فى الصغر المكونة «للعام» والتى تقترب من المالانهاية. الجملة هنا فى نهايتها تصبح العدد (e) الذى يُقرَّب إلى ٢,٧٠٠٠ ويتبع الرقم العشرى ٧ أرقاما عشرية لا نهائية العدد وبدون نمط فى تواجدها.

من ناحية أخرى فإنه توجد أكثر من ما لانهاية فعلية أولها يسمى . (أَلِف صفر) وهو «عدد» الأعداد الطبيعية. وهناك مالانهائيات أخرى «أكبر» منها. على سبيل المثال عدد المستقيمات التى تمر بنقطة خارج مستقيم معلوم هو ما لا نهاية ولكنه أكبر بواحد من العدد اللانهائى الذى يمثل عدد نقاط الخط المستقيم (بحسب مسلمة إقليدس التى تقول بأه يوجد

مستقيم واحد وواحد فقط يمر بنقطة معلومة خارج خط مستقيم ويوازى الخط المستقيم).



كما أن العدد اللانهائى لمجموعة الأعداد النسبية أكبر من العدد اللانهائى لمجموعة الأعداد الطبيعيـة••• وهكذا... بدأ التفكير فى قضية المالانهاية فى إشكالية طرحها الفيلسوف الإغريقى زينو Zeno (حوالى عام ٤٥٠ ق.م) مثَلَّت آنذاك صراعًا معرفيا بين الحِس العام والمعرفة الأصيلة. وهى الإشكالية المعروفة بالسباق بين الأرنب (أشيلوس) ذى الأقدام السريعة وبين السلحفاة ذات الأقدام بطيئة الحركة. افترض زينو أن السلحفاة تتقدم عن الأرنب بمسافة (ولنفترض نحن أنها ١٠٠٠ متر، وأن سباقا بدأ بينهما حيث الأرنب يتحرك بسرعة تساوى عشرة أمثال سرعة السلحفاة.

فى رأى زينو أن الأرنب لن يلحق بالسلحفاة أبدًا، لأنه فى الوقت الذى يقطع فيه الأرنب الألف متر تكون السلحفاة قد



سبقته بمائة متر وعندما يجرى الأرنب المائة متر تكون السلحفاة قد سبقته بعشرة أمتار... وهكذا سوف تسبق السلحفاة الأرنب بمسافات بحسب المتتابعة ١,٠، ٠١,٠، ٠٠١,٠، ٠٠٠ بمسافات تصغر رويدًا رويدًا فى تناهٍ من الصِغَر ولكن يظل دائمًا بينهما مسافة تتناهى فى الصغر مهما ازداد زمن السباق... لقد لعبت هذه التتابعات اللانهائية دورًا هامًا فى تطور مفهوم المالانهاية والتى رأى البعض فيها أشياء سخيفة وآخرون رأوا فيها أفكارًا شيطانية وأن التفكير فى بعض مظاهرها مثل توالى الليل من بعد النهار قد يكون عملاً غير إيمانى... وقد ظلت المشكلة تراوح نفسها إلى أن أوضح كانتور (١٨٤٥-١٩١٨م) وجود المالانهاية فى صورتيها

الفعلية والكامنة ولاقى معاناة كبيرة فى عرض أفكاره تطور إلى اضطهاد علمى من أستاذه كرونيكر... وقد تابع أفكار كانتور الرياضى جودل (Godel) ذو الأصول التشيكية والتربية الألمانية الذى بحث أكثر وأكثر فى اللانهاية بعد أن تخرج من جامعة فينا ثم سافر إلى جامعة برينستون بالولايات المتحدة فى منتصف ثلاثينيات القرن العشرين ثم عاد ليواصل بحوثه فى لانهائية الأعداد بين الصفر والواحد ولانهائية المُتَّصَل (Continuum) حتى عام ١٩٧٨ حين توفى عن عمر ناهز الثانية والخمسين. تابع دراسة اللانهاية ونظرية المتصل ونظرية المجموعات (Sets)

(ألبرت أينشتاين صاحب النظرية النسبية)
ومكتشف العلاقة $E=mc^2$ أى
الطاقة = الكتلة × مربع سرعة الضوء

ومشكلة الاتساق فى بعض مسلمات الرياضيات الحديثة رياضيون مثل «كوهين» (Cohen) ووايل (Weil) وغيرهما... المهم أن مفهوم اللانهاية أصبح مفهوما رياضيا يتم التعامل معه وبه فى سائر الفروع الرياضية وخاصة فى التحليل الرياضى، كما وأن هناك جبر يحدد العمليات على اللانهايات كبيرها وصغيرها..، لعله من الطريف هنا الإشارة إلى مقولة تنسب لأينشتاين عندما سئل فى مؤتمر صحفى فى الثلاثينيات من القرن العشرين عن اللانهاية حيث قال أنه يعرف شيئين لانهائيين هما العالم والغباء البشرى ولكنه – أى أينشتاين – ليس متأكدًا من الشىء الأول. ترى هل كان أينشتاين يتنبأ بما يحدث فى العالم هذه الأيام، وبعد أن توفى عام ١٩٥٥؟

(١-٥) نظام العد الثنائى: البِت والبايت والرقمنة:

كان ابتكار النظام العربى العشرى فى العَدْ من أعظم الابتكارات ليس فقط فى أنه استخدم عشرة أرقام أساسية

مستقلة فقط (٠، ١، ٢ ٠٠٠، ٩) بل أيضًا في استخدامه فكرة القيمة المكانية حيث المنازل والخانات تسير من اليمين إلى اليسار كالآتي: أحاد (١)، عشرات (١٠)، مئات (١٠ ٢)، آلاف (١٠ ٣) .... وهكذا تتزايد قوى الأساس عشرة. كان ذلك دافعًا لإمكانية وجود نظم عد أخرى تستخدم عددًا محدودًا من الأرقام الأساسية المستقلة وأساسًا معينًا وقيما مكانية. الرياضي الألماني ليبنتز (Libnitz) (١٦٤٢-١٧٢٧م) ابتكر نظامًا عَدِّيا ثنائيا (ثنويا) يتكون من رقمين أساسيين مستقلين فقط هما ٠، ١ وباستخدام الأساس (اثنان) والقيمة المكانية: آحاد، ٢، (٢)٢، (٢) ٣ ، .... أنشأ نظاما ثنائيا. فالعدد ٣ مثلا يتحول إلى ١١، ٤ يتحول إلى ١٠٠ وهكذا.

يقال أن ليبنتز استلهم هذا النظام من قراءاته في سفر التكوين عن بدء الخلق حيث الله (١) والخواء أو العدم أو اللاشيء قبل الخليقة (٠)، ومن هذه الثنائية خلق الله كل

شىء... ظل هذا النظام الثنائى الذى يمكن التعبير بواسطته عن كل الأعداد مجرد عمل رياضى ذهنى بحت... إلى أن جاء الكمبيوتر ليقوم بثورة بيضاء لبناء مجتمع المعلوماتية التى تتطلب قدرات فائقة على التخزين والمعالجة والاستدعاء ومن ثم احتاج إلى نظام أبسط من النظام العشرى ليدخل به الأعداد ثم البيانات والمعلومات. تَوَقُّف النبض الإلكترونى فى دائرة يمثل الرقم (٠) وسريان النبض يمثل الرقم (١). فالدائرة على التوالى التى بالشكل (ـــاـــهـــاـــهـــهـــ) تمثل العدد (١١٠١٠) أى العدد العشـــــرى (٢٦). كـــذلك وضعـــت تشـــفيرات بالنظـــام الثنائى للحروف فمثلاً الحـــرف A يمثـــل بالشفرة (١١٠٠١٠) وهكذا. وبذلك يمكن



ليبنتز (١٦٤٢-١٧٢٧)

إدخال أعداد وكلمات بما يسمى عملية الرقمنة (Digitaliation). ويسمى الرقم٠ أو ١ بِت (Bit) اختصارًا للتعبير (Binary Digit) ويطلق على مجموعة من البِتَات وحدة تُسمى بايت (Byte) وتقاس سعة ذاكرة الكمبيوتر بالبايت أو بوحدات أكبر مثل الكيلوبايت والميجابايت. البايت يتكون من ثمانية بتات (فى النظام الموسع)، الكيلو بايت (KB) = ١٠٢٤ بايت، الميجابيات (MB) = ألف كيلو بايت.

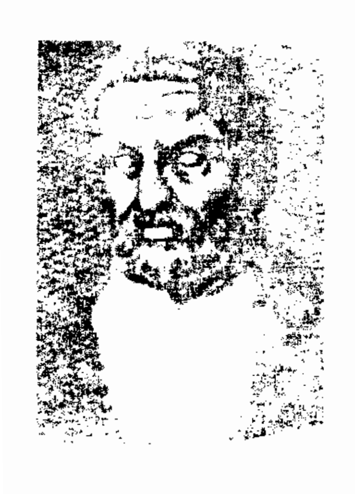
(ثانيًا) : الهندسة... ومنطق «بما أن... إذن»

(٢-٠) يقول هيرودوت المؤرخ الإغريقى أن الهندسة نشأت فى مصر. وكما هو الحال فى كل المجالات الرياضياتية وأيا كانت نشأتها فإن الهندسة بدأت مراحلها الأولى حدسية فى طبيعتها. الهندسة فى معناها تعنى قياس الأرض (Surveying). وقد توصل الإنسان للحقائق المتعلقة بالقياس دون محاولة لإثبات تلك الحقائق بأى عملية فكرية من التعليل الاستنباطى (Deductive) أو باستخدام المنطق. لقد بحثت الهندسة البدائية فقط عن صيغ وأشكال مقبولة مثل تضفير أشكال متماثلة فى حصيرة. بعد ذلك جاءت قياسات لمستطيلات ومثلثات وكما ظهرت فى كتاب أحمس حيث تضمن مثلاً ما معناه أن مساحة المثلث متساوى الساقين يساوى $\frac{١}{٢}$ القاعدة فى الارتفاع، وأن مساحة الدائرة التى قطرها ق هو م = $(ق - \frac{١}{٩} ق)^{٢}$ ومنها يمكن استنتاج أن العدد (ط) يساوى تقريبًا ٣,١٦٠٥... مثل تلك القواعد

استخلصها المصريون القدماء على أسس تجريبية كما فى حالة الثلاثية (٣، ٤، ٥) التى ينقسم إليها حبل (مقسم إلى ٣ عقد، ٤ عقد، ٥عقد) لتكوين زاوية قائمة. نفس الظروف تواجدت عند البابليين والهنود والرومان فى إعطاء قياسات وقواعد وضعية لأغراض مدنية وحربية استنادًا إلى التجريب وإلى المحاولة والخطأ... وهكذا بالنسبة لحضارات قديمة أخرى.

(٢-١) طاليس وفيثاغورس:

بداية الهندسة النظرية والمتمحورة حول فكرة إثبات صحة قضية ما يرجعها المؤرخون إلى طاليس (حوالى ٦٠٠ ق.م) الذى كان فى الأصل يعيش على تجارة



طاليس

الزيتون فى شبابه. إلا أنه اهتم بدراسة الرياضيات. ينسب إلى طاليس أنه أثبت نظريا خمس مبرهنات/ نظريات (Theorems)، المهم فيها ليست النظريات نفسها بل البرهنة على صحتها نظريًا وهى:

(١) قطر الدائرة يقسمها إلى نصفين.

(٢) الزاوية المحيطية المرسومة على قطر دائرة تكون قائمة (ويقال أن طاليس ذبح عجلاً ابتهاجًا بهذا الاكتشاف).

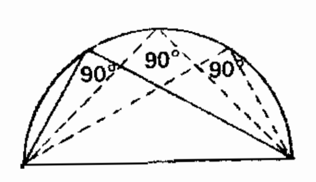
(٣) المستقيمان المتقاطعان يكونان أربع زوايا بحيث أن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تتساويان.

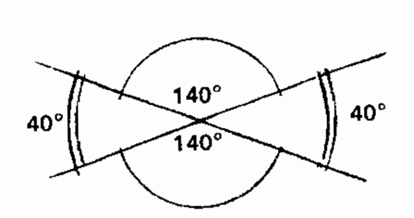
(٤) فى المثلث المتساوى الساقين تتساوى الزاويتان المقابلتان للساقين (زاويتا القاعدة).

(٥) يتطابق المثلثان إذا ساوى فى أحدهما زاويتان وضلع نظائر لها فى المثلث الآخر.

وينسب لطاليس أن له الفضل فى أنه قدم هندسة

المصـــــــريين للإغريق بحكم سفـره المتواصل بـــرًا وبحـــرًا للتجارة. ومن الناحية الأخرى فـــإنه كـــــان لفيثاغـــــورس الفضل فى تحقيق أحلام طاليس فى توجهه نحو التنظير والتجريد الهندسى.





ولعل أشهر أعمال فيثاغورس الهندسية هى النظرية المعروفة باسمه والتى أثبت فيها نظريًا أن «مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى مساحة المربع المنشأ على الوتر». من الطريف أن بعض المصادر العربية الوسيطة تسمى الشكل الذى يوضح النظرية

باسم «كرسى العروسة». ويقول بروكلوس أن فيثاغورس هو أول من طبع الهندسة بطابعها المنطقى وأنه أول من رتب النظريات الهندسية الأساسية ترتيبًا منطقيًا. ويرى البعض أن فيثاغورس استلهم نظريته من المصريين الذين كانوا يستخدمون حبلا مقسما إلى ثلاث عقد وأربع عقد وخمس عقد لعمل زاوية قائمة واستخدام ذلك فى إقامة منشآت عمودية على سطح الأرض. وقد أعطيت قوانين عديدة لاستخراج ثلاثيات فيثاغورس. مثل: لأى عدد طبيعى م يكون

$$(م^{٢} + ١)^{٢} = (م^{٢} - ١)^{٢} + (٢م)^{٢}$$

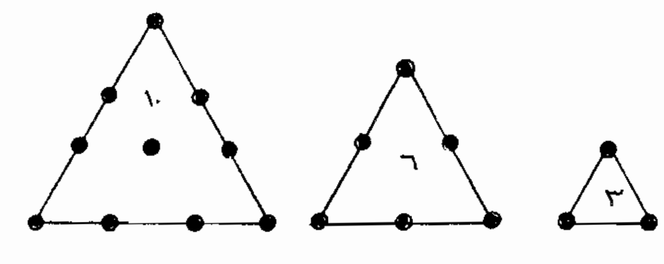
ولأى عددين صحيحين ن، ك يكون

$$(ن^{٢} + ك^{٢})^{٢} = (ن^{٢} - ك^{٢})^{٢} + (٢ ن ك)^{٢}$$



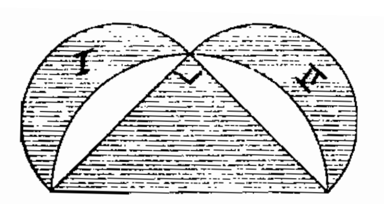
فيثاغورس

وقد ربط فيثاغوس بين الأعداد والأشكال الهندسية فالنقطتان تمثلان مستقيما والثلاث نقاط تمثل مثلثا، كما قدم الأعداد المثلثة والأعداد المربعة والمخمسة... وهكذا.



الحسن بن الهيثم والقطاعات الهلالية:

كانت نظرية فيثاغورس حافزا لدراسة العلاقة بين مساحات أشكال على أضلاع المثلث القائم الزاوية. لعل من بينها ما اكتشفه الحسن بن الهيثم (عام ١٠٠٠م) من أن «مجموع مساحتى القطاعين الهلاليين المرسومين على ضلعى مثلث قائم الزاوية تساوى مساحة المثلث القائم الزاوية» وهى النظرية التى استفاد منها ليوناردى فينشى فى الكثير من لوحاته المتضمنة أشكال هلالية.



مساحة المثلث = مساحة I مساحة II

(٢-٢) إقليدس وكتاب الأصول : أول بناء علمى منطقى :

فى حوالى (٤٥٠ ق.م) بدأت تظهر عند الإغريق سلسلة من النظريات المبنية على بضع مسلمات وتعاريف معروضة عرضا منطقيا منظما. أشهر تلك المحاولات تمثلت فيما قدمه إقليدس (Euclid) حوالى عام ٣٠٠ ق.م فى كتاب الأصول.

نال إقليدس بعمله هذا شهرة عظيمة بالدرجة التى قيل عنه أنه معصوم من الخطأ، وإن كانت تلك الشهرة كانت من أسباب تأخر علم الهندسة حيث نجد رياضيا شاعرًا وفيلسوفا هو عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١م) ومن قبله نصير الدين الطوسى يقف على عتبة اكتشاف الهندسة اللاإقليدية ولكنه

رفض قبول أية مسلمات تخالف مسلمة إقليدس الخاصة بالتوازى لاعتقاده بعدم إمكانية أن يخطئ إقليدس (رغم أن قبول مسلمة تخالف مسلمة إقليدس لا يعنى وجود خطأ).

وضع إقليدس أول نظام منطقى فى تاريخ العلم حيث نظم المفاهيم والخواص الهندسية التى استلهمها من عالم الحقيقة المتمثل فى الفضاء/ الفراغ الفيزيقى ومن الخواص التى اكتشفها وصاغها رياضيون وممارسون عمليون من قبله – نظمها فى تتابع منطقى ذى نسق متآلف مستندًا إلى مجموعة من المبادئ العامة والبديهيات الواضحة المقبولة بالحواس والتى تشرح نفسها بنفسها. وقد بناها خاصة تلو الأخرى بالبرهان والمنطق وضمنها فى كتابه الذى نطلق عليه بالعربية «الأصول» (Elements) سائرًا على مذهب أفلاطون الذى قال بأن «المعرفة الرياضية يمكن أن تكتسب عن طريق التعليل والبرهان فقط... لذلك ينبغى ألا نستنتج خواصًا هندسية من الشكل/ الرسم بل من برهان صحيح». بنفس المعنى قال أرسطو «عند بناء نظام رياضى ينبغى أن نبدأ من مبادئ عامة

يستند إليها كل أنواع التفكير الاستنباطى (Deductivc) على أن نبدأ من مبادئ خاصة نسلم فيها بالمفاهيم الأساسية «التى لها معان ثم ينبغى أن نعرِّف المفاهيم الأخرى بإرجاعها إلى مفاهيم كبرى أعم...». كتاب إقليدس مكون من ١٣ جزءًا: الستة الأولى تناولت الهندسة المستوية، الثلاثة التالية عالجت الأعداد، الجزء العاشر ناقش قضية الأعداد «الصماء» والنسب «غير النسبية»، وعالجت الثلاثة الأخيرة الهندسة المجسمة الفراغية (فى ٣ أبعاد).

(٢-٣) الهندسة الإقليدية:

وضع إقليدس منظومته الهندسية على أساس خمس مسلمات (تقبل بدون برهان)، وهى:

(١) يمكن رسم خط مستقيم من أى نقطة إلى أخرى.

(٢) يمكن مد خط مستقيم محدود باستمرار.

(٣) يمكن رسم دائرة بمعلومية مركز ومسافة معلومة.

(٤) الزوايــا القــائمة متطابقة (متساوية فى القياس).

(٥) إذا قطع مستقيم مستقيمين بحيث أن مجمـــــوع الزاويتــــين الداخلتــين وفى جهة واحــدة من القاطع تكون أقل من قائمتين فإن هذين المستقيمين يلتقيان إذا مدا على استقامتهما من الجهة التى يكون فيها مجموع الزاويتين الداخليتين أقل من قائمتين.



إقليدس

المسلمة الأخيرة هى المشهورة باسم مسلمة التوازى والتى استبدلت بعد ذلك بمسلمة مكافئة هى مسلمة «بلاثعير» والتى تنص على أنه:

«من نقطة خارج مستقيم معلوم لا يمكن رسم أكثر من مستقيم واحد يوازى المستقيم المعلوم».

وقد حاول كثيرون البرهنة على المسلمة الخامسة استنادًا إلى المسلمات الأربعة السابقة وعلى ٢٨ نظرية تم برهنتها استنادًا إلى تلك المسلمات الأربعة، ولكنهم فشلوا... مما أثبت سلامة وضعها كمسلمة.

(٢-٤) الهندسة اللاإقليدية (Non Euclidean):

فى الوقت الذى كانت لاتزال تجرى فيه محاولات للبرهنة على مسلمة إقليدس فى التوازى والتمسك بأن هندسة إقليدس كانت مثالاً للحقيقة اللزومية (على حد تعبير الفيلسوف كانت)، ظهرت محاولات شجاعة على يدى كارلوس حاوس (١٧٧٧-١٨٥٥م) فى ألمانيا ولو باتشفسكى (١٧٩٣-١٨٥٦) فى روسيا وبولياى (١٨٠٢-١٨٦٠) فى المجر، تمثلت فى قبول مسلمات أخرى تناقض مسلمة إقليدس، وقد كان من يقول بغير ما قاله إقليدس يتعرض

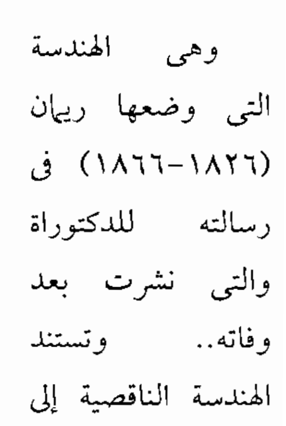
لنوع من الإرهاب الفكرى الذى كان من الممكن أن يطيح بسمعته. وقد ظهرت مسلمتان بديلتان تكونت منهما الهندستان اللاإقليديتان الزائدية والناقصية. ولا يعنى ذلك خطأ مسلمة إقليدس بل يعنى أنها مستقلة لا يمكن اشتقاقها بالبرهان. وكان قبل ذلك ظهرت كتابات عن هندسات أخرى لا تتبع مسلمة إقليدس مثل هندسة «النجوم الحائرة» (Astral Geometry) لأستاذ قانون يدعى شيفكارت كان يعمل فى جامعة ماريوج الألمانية (عام ١٨١٨).

(أ) الهندسة الزائدية (Hyperbolic)

وهى التى وضعها لوباتشفسكى وبولياى استنادًا إلى مسلمة بديلة تقول بأنه: «من نقطة معلومة خارج مستقيم معلوم يمكن رسم أكثر من مستقيم واحد يوازى المستقيم المعلوم».

وبهذه المسلمة والمسلمات الأربعة السابقة لمسلمة التوازى (عند إقليدس) أمكن تكوين هندسة متآلفة (متسقة) يكون فيها «مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين»، وحيث الفرق يسمى قصور المثلث ويتناسب مع مساحة المثلث.

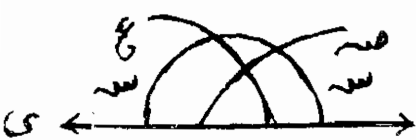
(ب) الهندسة الناقصية (Elliptic)





ريمان

وهى الهندسة التى وضعها ريمان (١٨٢٦-١٨٦٦) فى رسالته للدكتوراة والتى نشرت بعد وفاته.. وتستند الهندسة الناقصية إلى مسلمة بديلة تقول بأن: «من نقطة معلومة خارج مستقيم معلوم لا يوجد أى مستقيم يمر بالنقطة المعلومة ويوازى المستقيم المعلوم» المعلوم. وبالتالى فإن أى مستقيمين مستويين يتلاقيان ويشتركان فى أكثر من نقطة. وفى هذه الهندسة المستندة إلى مسلمة ريمان والأربع مسلمات السابقة



لمسلمة التوازى، يكون مجموع زوايا المثلث أكبر من قائمتين، وحيث مساحة المثلث تتناسب مع زيادة مجموع زوايا المثلث القائمتين.

فمثلاً يمكن أن تكون س، ص، ع ثلاثة مستقيمات عمودية على المستقيم ى.

ولقد تسبب ظهور هندسة لا إقليدية فى انتعاش مناقشات فلسفية فى رفض الزمان المطلق والمكان المطلق، وفى تقديم تفسيرات وتمثيلات هندسية تتواءم مع نسبية أينشتاين وفيزياء الكم.

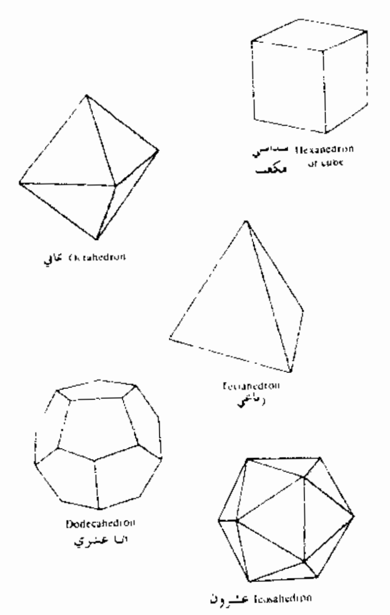
فمثلاً: إذا قطع شخص مسافة قدرها (٣٠٠٠) ميلا غربا، (٤٠٠٠) ميلا جنوبا على سطح الأرض فإن أقصر مسافة من نقطة الابتداء إلى نقطة الانتهاء لا تكون (٥٠٠٠) ميلاً بل تكون حوالى (٤٧٤٠) ميلاً تقريبًا. وهذا المسار هو طريق الدائرة الكبرى الذى تستخدمه الخطوط الجوية لشركات الطيران حتى يكون استهلاك الوقود وزمن الطيران أقل ما يمكن.

(٢-٥) المجسمات (Solids) والمجسمات الأفلاطونية :

لم يهتم الإغريق كثيرًا بتنمية الهندسة المجسمة (الفراغية) كما فعلوا بالهندسة المستوية، ولذا لم تكن مسميات وتعاريف المجمسات مقننة. فمجسم سطوح متوازيات الأضلاع المتوازية (Parallel-Piped) يعنى فقط شكل كثير سطوح كل من أوجهه متوازى أضلاع، وكذلك الحال مع مجسم متوازى المستطيلات أو شبه المكعب. كلمة الهرم (Pyramid) أخذها الإغريق عن المصريين وقد كانت تعنى فى اللغة الإغريقية جسم على شكل النار (Fire-shaped).

وقد استفاد الإغريق مما جاء فى بردية أحمس فى التعامل بقوانين بعض المجسمات بطرق تجريبية. وقد اهتم الإغريق بما سمى بالمجسمات الأفلاطونية أو الكونية، وهى خمسة مجسمات محدبة تشكل حروفها مضلعات مستوية منتظمة متطابقة. وهذه المجسمات هى: رباعى الأوجه (Tetrahedron) والمكعب: وله ستة أوجه كل منها على شكل مربع، وثمانى الأوجه (Octahedron)، والإثنا عشرى الأوجه (Dodecahedron)، والعشرونى الأوجه (Icosahedron).

وفى نهاية القرن السادس عشر ابتكر كبلر (Kepler) نموذجًا لتنظيم الكواكب تضمن كرات وحيدة المركز مرسومة داخل وخارج مجسمات أفلاطونية. المجسمات متعددة الأوجه تفيد حاليًا فى دراسة البللورات فى الكيمياء وفى الإلكترونيات.



الخمس مجسمات الأفلاطونية

(٢-٦) الثلاث مسائل الشهيرة فى الهندسة :

واجه الإغريق ثلاث إشكاليات هندسية تمثلت فى إنشاءات هندسية لم يستطيعوا حلها باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار فقط وهى:

(أ) تثليث الزاوية أى تقسيمها إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

(ب) تربيع الدائرة أى إيجاد مربع مساحته تساوى مساحة دائرة معينة وهو ما يعنى إنشاء قطعة مستقيمة طولها يساوى محيط الدائرة.

(جـ) تضعيف المكعب أى إيجاد ضلع مكعب يكون فيه حجم المكعب ضعف حجم مكعب معين.

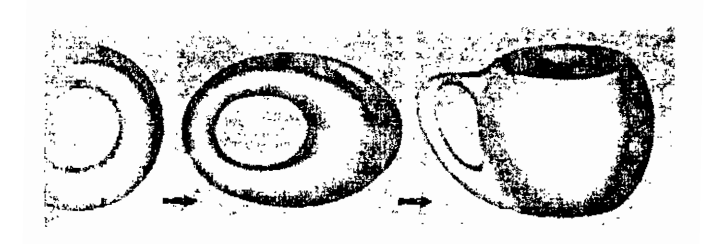
وقد شغلت هذه الإشكاليات الرياضيين حتى القرن التاسع عشر والتى أمكن حلها بشروط إضافية لقيود الحافة المستقيمة والفرجار، مع الاستعانة بطرق جبرية مرتبطة بنظرية المعادلات التكعيبية وحيث أثبت ليندرمان عام (١٨٨٢) أن «ط» عدد متسامى.

(٢-٧) الهندسة الوصفية (Descriptive Geometry) :

بدأت الهندسة الوصفية كعلم مستقل قبل حوالى ثلاثين عامًا من نشرها على يدى مبتكرها مونج (Monge) (١٧٤٦-١٨١٨). وهى فى جوهرها هندسة تمثيل أشكال ثلاثية البعد عن طريق إسقاطات مناسبة لها على مستوى ثنائى البعد. ويرجع المؤرخون ملامحها الرئيسة لآخرين مثل ديسارجس (١٦٣٩) ولامبرت... وقد أضاف إليها وطورها هاشيت (Hachette) فى النصف الأول من القرن التاسع عشر.

فكرة إسقاط مستقيم على مستوٍ فكرة قديمة فى حد ذاتها ظهرت فى أعمال إغريقية ومتضمنة فى معالجة تقاطع أنواع من السطوح. فى عام (١٨٢٢) نشر بونسلت (Poncelet)، وعلى الرغم من أنه كان سجينا فى روسيا، دراسة لخواص إسقاطية مقدما ما سمى بالنسبة الفوق التوافقية (Anaharmonic) والتى بلورها بعد ذلك فى الفترة (١٨٤٧-١٨٦٠). بعد ذلك جاء مبدأ الثنائية (Duality) فى الهندسة الإسقاطية، والذى

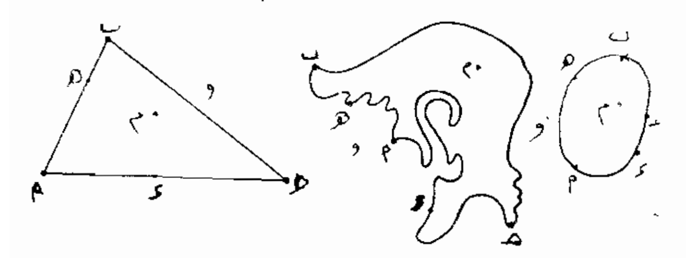
يقول بوجود تماثل بين النقط والخطوط. فمثلاً «أى نقطتين مختلفتين يحددان خطا مستقيما واحدا يمر بهما»، وبالمثل «أى مستقيمين مختلفين يحددان نقطة واحدة يمر بهما المستقيمان».



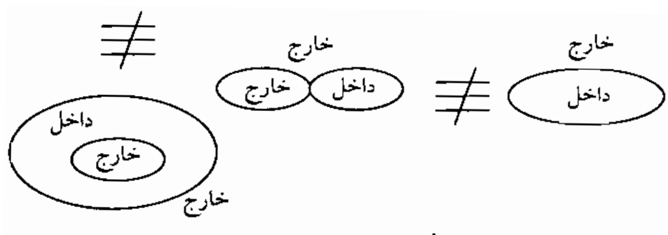
(٢-٨) التوبولوجى بين قرص الحلقة وفنجان القهوة:

تهتم لهندسة التوبولوجية بأشكال السطوح عندما يجرى تشويهها عن طريق الشد سحبا أو التقليص انكماشًا أو عن طريق التعويج باللى أو التحريف حيث يمكن تحويل الوجه الداخلى لسطح ما إلى السطح الخارجى والعكس بالعكس. ويمكن القول أن طـالب التوبولوجى هـو الشخص الذى لا يميز بين قرص الحلقة وفنجان القهوة، فعلى الرغم من أنه

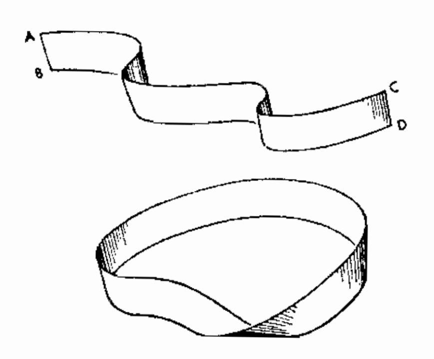
لا يمكن تحويل أحدهما للآخر، إلا أن هندسة التوبولوجى تقول أنهما متكافئان. ويعرف التوبولوجى رياضيًا على أنه دراسة اللامتغيرات فى الأشكال الهندسية تحت مجموعة من التحويلات. فى التوبولوجى (أو هندسة تحليل الموقع) (لا يسأل الشخص عن طول أو مساحة شكل معين بل يكون اهتمامه يكون عن «أين»، بين ماذا وماذا؟ لا يهم هنا إذا كان الخط منحنيا أو مستقيما... إنه يهتم بهندسة «لا كمية» و«لا قياسية» ولكنه يهتم بعلاقة وموقع أجزاء الشكل بالنسبة لبعضها بغض النظر عن الهيئةأو الحجم.



الأشكال الثلاثة المبنية متكافئة توبولوجيا طالما أن أى نقطة (د) مثلا مازالت تقع بين أ، ج، وأن النقطة (م) تظل داخل الشكل المغلق وتظل النقطة (و) خارجه.



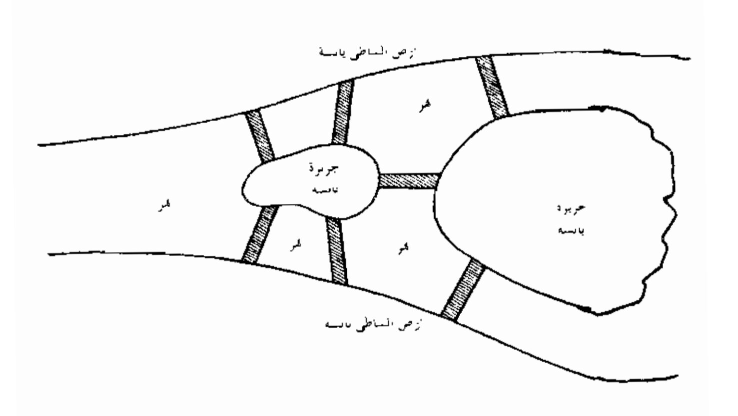
ثلاثة أشكال غير متكافئة توبولوجيا



شرائط موبياس (وحيدة السطح)

نشأ التوبولوجى عن محاولة حل مشكلة أثارها أهل مدينة كوينسبرج (Konisberg) البروسية، حيث كان هناك سبعة كبارى تربط ضفتى النهر الذى يخترق المدينة، وكان

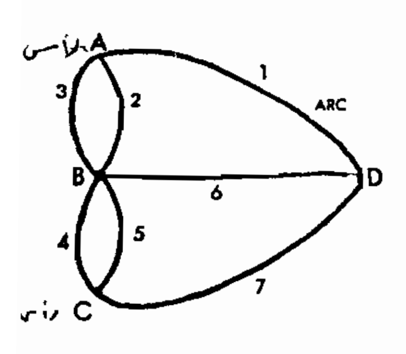
التساؤل «هل يمكن لشخص أن يمشى فوق كل الجسور السبع فى مسار واحد دون أن يمشى فوق أى من الجسور أكثر من مرة واحدة؟».



عندما سمع أويلر (Euler) وهو فى سويسرا عن هذه المشكلة قام بحلها رياضيا أمام الأكاديمية فى بتسبرج عام ١٧٥٣م، حيث برهن على أن الرحلة عبر الجسور السبع بتلك الشروط كانت مستحيلة. لتبسيط المشكلة وضع أويلر مخططا

نمذج به المشكلة، حيث مثل الأرض اليابسة بنقاط، والكبارى بخطوط تربط بين هذه النقاط وأصبح السؤال كالآتى:

«هل يمكن رسم الشكل النموذج بجرة قلم متصلة دون رفع سن القلم عن الورقة؟».



وأصبحت المشكلة مشكلة اجتياز شكل بيانى (Graph). الشكل البيانى – فى هذا الصدد – هو شكل يتكون من عدد محدود من النقاط تسمى الرؤوس وعدد من الأقواس. الرؤوس هى النقاط التى تنتهى عندها الأقواس، وأى قوسين لا يكون بينهما نقاط مشتركة إلا إذا كان الرأس مشتركا. الرأس يصنف فرديًا أو زوجيًا بحسب ما إذا كان عدد الأقواس التى تكونه فردية أو زوجية.

ويعتبر الشكل البيانى «مجتازا» إذا كان المرور فى كل الأقواس يتم مرة واحدة وواحدة فقط.

اكتشف أويلر أن الشكل البيانى يكون «مجتازا» مبتدئا ومنتهيا عند نفس النقطة إذا كان الشكل يحتوى على رؤوس زوجية فقط. كذلك، اكتشف أويلر أنه إذا كان الشكل البيانى يحتوى على الأكثر رأسين فرديين فإنه قد يكون «مجتازا»، ولكن الاجتياز فى هذه الحالة لا يعود لنفس نقطة البداية.

وبصفة عامة:

إذا احتوى الشكل البيانى على (٢ن) من الرؤوس الفردية حيث ن عدد صحيح فإنه يتطلب لاجتيازه (ن) من الرحلات المختلفة. وحيث أن نموذج كوينسبرج (أصل المشكلة) يحتوى على (٤) رؤوس كلها فردية (انظر فى الشكل النقاط أ، ب، جـ، د)، لذلك فإن اجتياز النهر خلال السبعة كبارى يتطلب رحلتين وليس رحلة واحدة.

توصل أويلر أيضًا إلى وجود علاقة بين عدد الأوجه وعدد الرؤوس وعدد الأحرف لأى مجسم وهى كالآتى:

عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الحروف + ٢

فى الشكل المكعب مثلاً وتأكيدًا لنظرية أويلر:

عدد الأوجه = ٦، عدد الرؤوس = ٨

عد الأحرف = ١٢

٦ + ٨ = ١٢ + ٢



أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣)

وقد تطورت دراسة التوبولوجى لتعالج قضايا مثل عدد الألوان اللازمة والكافية لتلوين خريطة مهما كان عدد الدول التى تشملها بحيث لا يتم تلوين أى قطرين متجاورين بنفس اللون.. كما يشمل دراسات فى التحليل الرياضى وفى فراغات لها (ن) من الأبعاد وفى نظرية المجموعات (sets).

باسكال: شباب بلا ربيع:


باسكال (١٦٣١-١٦٦٢)

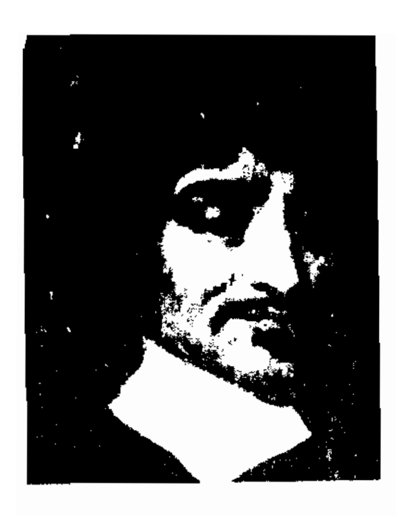
«للقلب منطقه وأسبابه التى لا يعرفها العقل... المعتقدات من شأن الروح وأما العلم فهو من شأن العقل»... هكذا قال بليز باسكال (Pascal) الرياضى الفرنسى الذى عاش حياة متأرجحة بين فكر علمى قوى وبين تدين وجدانى متوهج. نشر باسكال أول بحث رياضى له عن القطوع المخروطية أحدث دويا فى الدوائر الرياضية رغم صغر سنه. كما اهتم بالهندسة الإسقاطية التى كان المهندس «ديسارجس» ابتكرها حديثا وعمل منها موضوعا رياضيا جادًا وليس مجرد أسلوب فى الرسم المنظور يهتم بها الفنانون

فقط.. اكتشف باسكال أن الهندسة الإقليدية جزء من الهندسة الإسقاطية... تألق رياضيا حتى سن الثالثة والعشرين... حتى انتمى إلى مذهب دينى متشدد (اليانسينية) ثم تركه فترة فعاد إلى الرياضيات منشئًا «مثلث باسكال» الذى يساعد على حل مشكلات فى الاحتمال حيث يمثل أحد التوزيعات الاحتمالية... ولكنه بعد ذلك اعتبر أن الرياضيات والفيزياء نزوة شباب وهجرها... كان يعذب نفسه كلما مر بخاطره شعور بسعادة دنيوية، ولكنه ابتكر منحنى السيكلويد أثناء مرضه وعندما أحس بأن آلامه خفت اعتبر أن ذلك علامة من الله وبأنه لا يعارض هذا العمل.. ولكنه مرض بشدة وطلب أن ينقل إلى مستشفى الأمراض غير القابلة للشفاء لكى يموت مع الفقراء... وانتهى فى سن الحادية والثلاثين شبابا بلا ربيع وعبقرية جمدها الصقيع... صقيع تدين سلبى يباعد بين العقل والقلب...؟!!

(٢-٩) زفاف النقطة إلى العدد والهندسة الإحداثية:

مر ابتكار الهندسة الإحداثية/ التحليلية بثلاث مراحل:

(١) ابتكار نظام محاور متعامدة، (٢) الاعتراف بوجود تناظر أحادى بين الأعداد الحقيقية ونقاط الخط المستقيم ومن ثم بين الجبر والهندسة، (٣) التمثيل البيانى لدوال بصورة:



ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠)

ص = د (س).

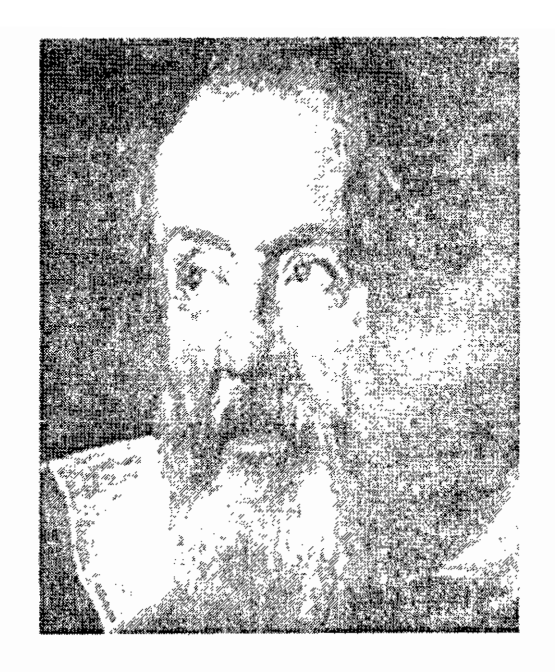
إلا أن هناك إجماعا على أن الهندسة الإحداثية أرسيت قواعدها على يد الرياضى الفرنسى رينيه ديكارت (Descartes) (١٥٩٦-١٦٥٠) الذى تخرج فى جامعة بواتييه. فقد استطاع أن يعقد زواجا رياضيا بين النقطة والعدد عن طريق تمثيل الأعداد بصريا بنقاط على خطوط مستقيمة ومستويات ثم فى أشكال ثلاثية الأبعاد. ومن ثم أمكن تمثيل المعادلات بأشكال هندسية والتعبير عن الأشكال بمعادلات،

ومهد بذلك للتقدم فى التفاضل والتكامل ولتمثيل ظواهر فى الفيزياء وعلوم أخرى بأشكال بيانية لدوال جبرية ولوغاريتمية ومثلثية. كان عصر ديكارت مليئًا بالأحداث حيث غاب شكسبير عن

معادلة الدائرة س٢ + ص٢ = نق٢

بالطريقة التى استخلصها ديكارت

عشاق مسرحه، وقال «هارفى» أن القلب ليس مصدر العواطف بل هو مضخة للدم. وكان الراهب الفلكى كوبرنكس يواجه تهمة الهرطقة بإعلانه أن الشمس هى مركز النظام الشمسى، كما كان جاليليو مشغولاً بمقرابه (تلسكوبه) ومحاكمته بسبب دعواه بدوران الأرض.



جاليليو

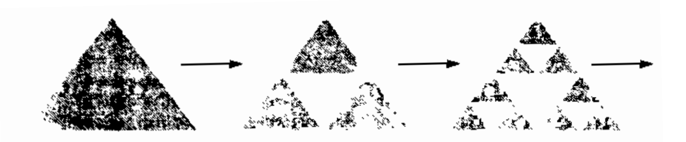
وسط كل هذا هجر ديكارت ذى الاثنين والعشرين عامًا ملذاته فى باريس وانقطع لدراسة الرياضيات ليقدم للعالم هندسته الإحداثية، وليقدم فلسفته الشهيرة «أنا أفكر... إذن أنا موجود» (Cogito Ergo Sum) ودعوته بأن تعالج كل أنواع المعرفة رياضيا ومن خلال المنطق بدءًا بمسلمات. تابع الهندسة الإحداثية رياضيون لاحقون، فمثلاً تبلورت الهندسة الإحداثية فى ثلاثة أبعاد على أيدى «برنولى» الذى حاول تمثيل سطوح فى ثلاثة أبعاد بيانيًا، وكذلك من رياضيين آخرين فى القرن الثامن عشر. كما قدم «مونج» العلاقة بين نظرية السطوح وتكاملات المعادلات التفاضلية. فى عام ١٨٣٥ قدم «بلوكر» (Plucker)معادلات لمنحنيات حتى الدرجة الرابعة، كما قدم معادلات بيَّن بواسطتها خواص أى منحنى من حيث الرتبة والصنف وعدد النقاط المزدوجة وعدد القرنات وعدد المهارسات المزدوجة وعدد (الانعطافات). فكرة الإحداثيات القطبية تنسب إلى «جريجورى» فونتانا (١٧٣٥-١٨٠٣).

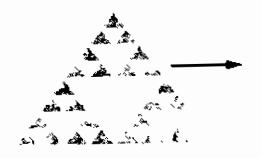
لعله من الطريف أن إحدى الروايات تقول أن الذى أوحى لديكارت بالهندسة الإحداثية أنه حاول تتبع ذبابة – كانت تتحرك على سقف حجرته – بالنسبة لحائطين متجاورين حول أحد أركان الغرفة.

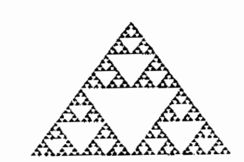
(٢-١٠) الهندسة الكسورية... وآن لنا أن ننصت للطبيعة:

الأشكال الهندسية الكسورية (Fractals) مثل مجموعة كانتور ومثلث سيربنسكى ومنحنى كوخ سبق ظهورها فى الأدبيات الرياضياتية فى قرون ماضية (ليست بعيدة) وكان ينظر إليها بسبب تعقدها على أنها أشكال مريضة ولا تهم إلا المهتمين بأبحاث الرياضيات. إلا أن ذلك تغير فى حوالى الثلاثين عامًا الماضية. فقد لاحظ الرياضى «ماندلبروت» (Benolt Mandelbrot) أن الأشكال الكسورية ليست مجرد أشكال تثير حب الاستطلاع الرياضياتى ولكنها أشكال تمثل «هندسة الطبيعة»، حيث كثير من الأشكال فى عالم الطبيعة هى أشكال كسورية فى مظهرها كما فى أشكال السحب

وسواحل الشواطئ ونبات الخردل.. وغيرها من الأشكال غير المنتظمة أو ذاتية التماثل، وأنه يمكن فهمها باستخدام الهندسة الكسورية أفضل من استخدام الهندسة الإقليدية.. ولا شك أن الخطوط المستقيمة والمثلثات والدوائر الإقليدية هامة لكثير من الأنشطة المفيدة للإنسان، إلا أن الطبيعة (على حد تعبير مؤلفى كتاب Fractals) تميل إلى بناء مكوناتها بطرق مختلفة بهندسة أكثر تعقيدًا وأكثر ثراء: وقد كان لتقدم تكنولوجيا المعلومات والحوسبة والتقنيات الديناميكية الفضل فى توضيح الأشكال الكسورية بصريا وليس فقط ذهنيا وأن تبرز جمالها واتساقها الذاتى. جدير بالإشارة أن بعض الأشكال الكسورية لها أبعاد كسرية، كما فى حالة مثلث سيبرنسكى حيث البعد ليس عددًا صحيحًا كما فى الأشكال الإقليدية بل كسريا ويساوى ١,٥٨٥ حيث أنه لا هو أحادى البعد مثل الخلوط ولا هو ثنائى البعد مثل السطوح.

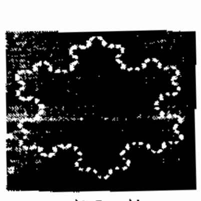






تكوين مثلث سيبرنسكى (الكـــورى)

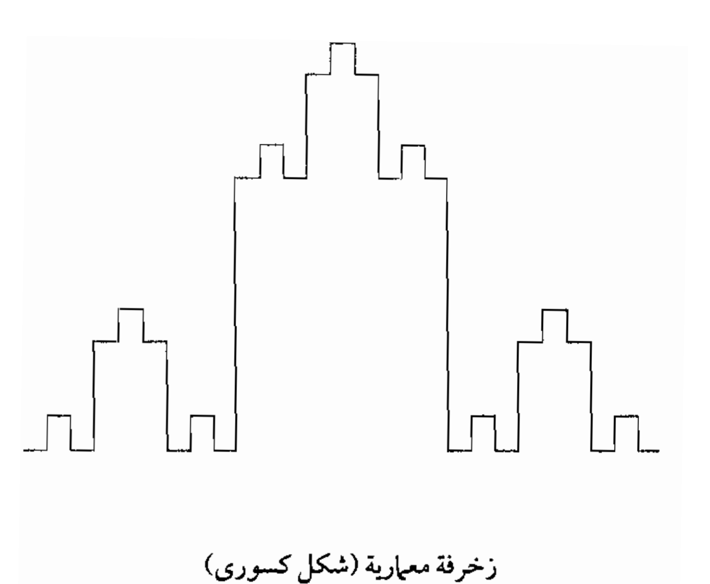
البعد (Dimension) = $\frac{\text{لو } ٣}{\text{لو } ٢}$ = ١,٥٨٥



بللورة ثلج



الشريط الساحلي لأحد الشواطئ



زخرفة معمارية (شكل كسوري)

(ثالثًا) : الجبر... والمقابلة

(٣-٠) يعتبر «علم الجبر» كعلم رياضى مستقل عن الحساب ابتكارًا عربيًا.



الخوارزمى

فقد اكتسب اسمه من كتاب عنوانه «الجبر والمقابلة»، حيث نقلت كلمة «الجبر» كما هى إلى اللغات الأجنبية بمسمى (Algebra)، ومثيلاتها، المعنى القاموسى للكلمة العربية «الجبر» - كما يذكره معجم مختار الصحاح كالآتى: «الجبر هو أن تُغْنِى الرجل من فقر أو تصلح عظمة من كسر». وكان أول من استخدم «الكلمة» هو محمد بن موسى الخوارزمى الذى أقام

فى بغداد فى القرن التاسع الميلادى فى عصر الخليفة المأمون. ألف الخوارزمى كتاب «الجبر والمقابلة» ككتاب لحل المعادلات بعد أن صنفها وأوضح طرق حل كل نوع منها. كانت عملية «الجبر» فى حلوله تعنى استكمال أو إصلاح طرف من طرفى المعادلة ثم تأتى عملية «المقابلة» لإيجاد قيمة المجهول بمقابلة طرفى المعادلة. وقد فسر ابن الياسمين (من القرن الثانى عشر الميلادى) ذلك بقوله:

وكل ما استثنيت فى المسائل
سيره إيجابا مع المعادل
وبعدما يجبر فليقابل
بطرح ما نظيره يماثل

وكانت «المسائل»تدور حول المال (العدد المربع أى س٢) والعدد (جذر المال أى س). وكانت فى معظمها لحل «مسائل» عملية تطبيقية لفظية.

تاريخيًا كان الجبر فى جوهره توسيعا لقواعد الحساب

لإيجاد قيم مجهولة وتعتمد أحيانًا على حساب عقلى وصور هندسية. وثمة أدلة تاريخية على أن بذور «الجبر» كانت فى طرقها إلى الظهور عند قدماء المصريين والباليين والهنود وربما فى حضارات قديمة أخرى ويقسم المؤرخ نيسيلمان (Nesselman) تاريخ الجبر إلى ثلاث مراحل:

(أ) مرحلة الصور الكلامية والتى كانت تكتب فيها المسائل وحلولها بكلمات لفظية.

(ب) مرحلة الصور المختصرة أو المختزلة وكانت الحلول فيها تكتب بكلمات مختزلة.

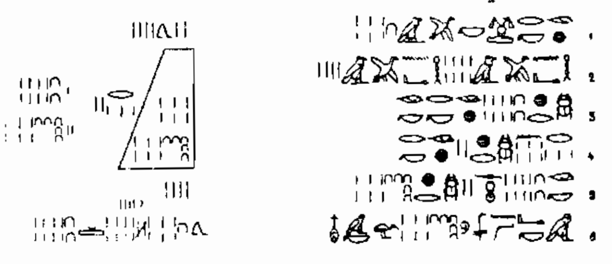
(ج) مرحلة الرموز الكاملة، حيث المسائل والحلول تكون بصور رمزية كاملة، كما وأن المسائل العملية والتطبيقية تحول إلى صور وعلامات جبرية رمزية قبل حلها.

(٣-١) الجبر فى مصر القديمة وبردية أحمس:

بُنى هرم الجيزة الأكبر قرابة عام (٢٩٠٠ ق.م) فوق مساحة تبلغ حوالى (١٥) فدانًا ويشمل أكثر من (٢ مليون)

قطعة حجرية يزن كل
منها فى المتوسط (٢,٥)
طن. أسقف بعض
الغـــرف داخـــل الهرم
مصنوعة مـــن أحجـــار
الجرافيت يقـــدر وزن
الواحد منها بحـــوالى
(٤٥) طنا. ويقال أن
القاعدة المربعة للهرم بها
خطأ نسبى لا يتجاوز
(١/ ١٤٠٠) وأن الخطأ
النســـبى فـــى الزوايـــا
القـــائمة لا يتجـــــاوز
(١/ ٢٧٠٠)... الكاهن
المصرى حدد موقع فتحة تشرق منها الشمس مرتين كل عام
وبالتحديد فى (٢٠أكتوبر، ٢٠ فبراير بحسب التقويم الميلادى

المعاصر) على وجه رمسيس فى معبد أبى سمبل... هذا وغيره يدل بلا شك على مهارات رياضية عظيمة تدل عليها نقوش ومخطوطات لعل أشهرها بردية أو قرطاس أحمس الذى يعود تاريخها إلى حوالى عام (١٦٥٠ق.م) والمعروفة باسم بردية رايند (Rhynd) التى اشتراها عالم المصريات هنرى رايند صدفة فى إحدى رحلاته الأثرية بصعيد مصر، وقد تم نشرها (عام ١٩٢٧). تحتوى هذه البردية على مسائل جبرية تتضمن حل معادلات من الدرجة الأولى والثانية وبعض المتواليات. وكانت السمة الغالبة على الحل استخدام تقدير أولى افتراضى للمجهول ثم تصحيح القيمة المفترضة بما يتفق مع معطيات المسألة الأصلية.



إيجاد حجم مخروط ناقص

كان أحمس يسمى المجهول «كومة» وتنطق بصوت يماثل (AHA). يذكر أن المصريين كانوا يعرفون حالات خاصة من ثلاثيات فيثاغورس. وقد زار فيثاغورس مصر وتعلم فى بعض معابدها فى القرن السادس قبل الميلاد. جدير بالإشارة أن المسائل فى البرديات المصرية كانت تقرأ من اليمين لليسار.

(٣-٢) لوحات البابليين:

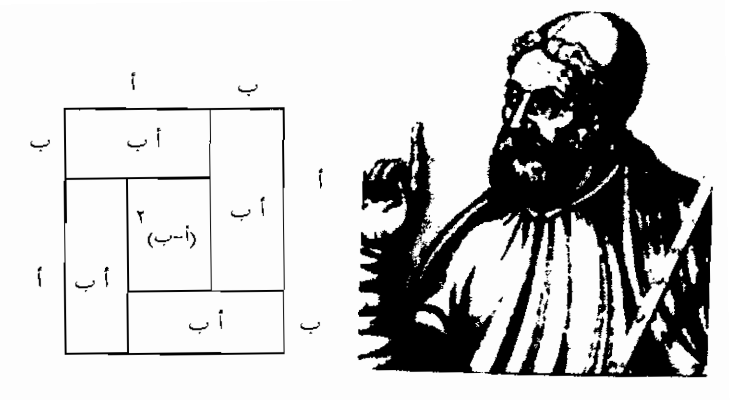
اكتشف فى منتصف القرن التاسع عشر الكثير من الآثار التى تدل على تقدم البابليين فى الرياضيات وذلك من خلال وثائق ولوحات صلصالية تعود إلى فترات من عصر الملك حمورابى وحتى عام (١٦٠٠ ق.م) وفترة الملك نبوخذ نصر. وتدل محتوياتها على قدرات فى حل مسائل ذات طبيعة جبرية وعمل جداول لحساب أرباح مركبة، وحل معادلات من الدرجة الأولى والثانية فى مسائل مثل أوجد عددين مجموعهما (١٤) وحاصل ضربهما (٤٥)، وكانوا يتفادون حل مسائل بها كسور... ويرى المؤرخون أن اهتمامات البابليين كانت نظرية أكثر منها عملية كما فى حالة المصريين القدماء.

(٣-٢) الجبر عند الإغريق:

كان الإغريق يعتقدون أن الكون – بصفة عامة – وكأنه مصنوع من نسيج رياضى، ومن ثم فإنهم اتجهوا اتجاها نظريا فى معالجاتهم الرياضياتية وبدأوا يضعون تعميمات بطرق استنباطية على أساس منطقى. ونظرًا لصدمة الفيثاغوريين فى معتقداتهم العددية، فإن اهتماماتهم بالجبر كانت من منظورات هندسية. فالعدد المربع عندهم مساحة والجذر التربيعى ضلع لمربع. اهتم الإغريق بمتطابقات جبرية ومثلوها بأشكال هندسية. على سبيل المثال:

	أ	ب	
أ	$\text{أ}^{٢}$	أ ب	أ
ب	أ ب	$\text{ب}^{٢}$	ب

$$(\text{أ} + \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} + ٢\,\text{أ ب} + \text{ب}^{٢}$$



بطليموس

(أ + ب)^{٢} = (أ − ب)^{٢} + ٤ أب

كذلك اهتم الإغريق بحل المعادلات التى عرفت باسم المعادلات السيالة حيث تشتمل المعادلة على أكثر من متغير. ويعتبر ديوفانتس من أشهر المهتمين بهذا النوع من المعادلات مثل (بالرموز الحديثة): س + ص = ١٠

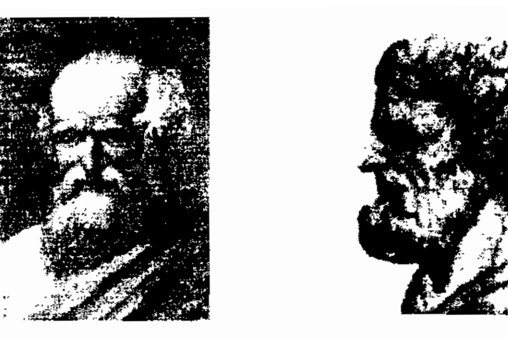
(٣-٤) مدرسة الإسكندرية وعمالقة الرياضيات:

أنشأ الإسكندر الأكبر مدينة الإسكندرية التى سميت باسمه عام (٣٣٢ ق.م). واختار بطليموس الإسكندرية عاصمة لملكه عام (٣٠٦ ق.م) وأنشأ فيها مدرسة

الإسكندرية التى تعتبر أقدم وأشهر جامعة علمية فى التاريخ. افتتحت الجامعة عام (٣٠٠ ق.م) وظلت قرابة ألف عام منارة للعلم والحضارة. وقد تعلم وحاضر فى مدرسة الإسكندرية كثير من علماء الرياضيات لعلم من أبرزهم: إقليدس وأرشميدس وارستثانوس وأبولونيوس وهيرون وديوفانتس وبابوس وهيباتيا التى تعتبر أول امرأة فى تاريخ الرياضيات وكان أبوها ثيون رئيس المدرسة. وقد لاقت هيباتيا حتفها بطريقة مأساوية نتيجة حقد لجهالها وعلمها وظلامية وانغلاق عقل المحرضين والقاتلين.



هيباتيا (٣٧٠-٤١٥م) أول امرأة فى تاريخ الرياضيات



أبولونيوس　　　　أرشميدس

مسألة إغريقية:

هنا يرقد ديوفانتس حباه الله طفولة تساوى $\frac{1}{6}$ عمره، وبلغ مرحلة الشباب بعد ذلك بمقدار $\frac{1}{12}$ من عمره، وتزوج بعد ذلك بزمن يبلغ ($\frac{1}{7}$) عمره، وأنجب ابنا بعد ذلك بـ(٥) سنوات، وعاش الابن ($\frac{1}{2}$) ما عاشه أبوه، وحزن الأب وقضى نحبه بعد وفاة ابنه ب(٤) سنوات.

أن عمر ديوفانتس ليس مكتوبا على القبر ولكن يمكنك أن تحسبه من علم الجبر (مات وعمره ٨٤ عامًا).

(٣-٥) الجبر فى الحضارة الهندية:

شأن الحضارات الشرقية القديمة كان للهند حضارة ولغة مقروءة ومكتوبة ورموز للأعداد. اهتمت الرياضيات فى الهند بالفلك وحساب المثلثات، وكان الهنود ماهرين فى حل المسائل الحسابية وطرق الحل بالمعكوس. اعترف الهنود بأعداد سالبة وغير نسبية وعرفوا أن للمعادلة التربيعية جذرين واستخدموا طريقة إكمال المربع كما اشتغلوا بمعادلات سيالة.

مسألة هندية: من أرياباتا إلى ابنته ليلا الجميلة:

خبرينى أيتها العذراء الجميلة ذات العيون البراقة لأنك تفهمين الحلول بالمعكوس. ما العدد الذى إذا ضرب فى (٣) ثم زيد بمقدار ($\frac{٣}{٤}$ حاصل الضرب) ثم قسم على ٧ وأنقص بمقدار (٢) ثم أخذ جذره التربيعى وأضيف إليه (٨) وقسم الناتج على (١٠) كان الناتج (٢). [٨]

(٣-٦) الجبر فى الحضارة العربية الإسلامية :

كما أشرنا سابقًا فإن الجبر فى نشأته يعتبر علما عربية. الحضارة العربية الإسلامية احتضنت وأنجبت رياضيين مبدعين (مسلمين وغير مسلمين). لقد أخذت هذه الحضارة من حضارات سابقة لها وأضافت لها خاصة فى العصر العباسى الذى كان يتميز بالانفتاح الثقافى وفى كثير من المدن المرتبطة بها مثل الإسكندرية وأنطاكية ودمشق والقاهرة وقرطبة فى الأندلس. من الرياضيين العرب المشهورين ثابت بن قرة، إسحاق بن حنين



ثابت بن قرة (٨٢٦-٩٠١)

والبوزجانى والبيرونى ونصير الدين الطوسى وابن يونس المصرى الذى كان يعمل فى المرصد الذى أسسه الفاطميون فوق جبل المقطم وعمر الخيام وقسطا، ابن لوقا والبتانى ويوحنا القس والرازى... والحسن بن الهيثم والذى ينسب إليه أنه قال «لو كنت بمصر لعملت فى نيلها عملا... يحصل النفع فى كل حالة «من حالاته من زيادة ونقصان». وقد أشار إلى فكرة تخزين مياه النيل عند أسوان. وكان عمر الخيام مبدعا فى رياضياته كما كان مبدعا فى رباعياته ومن إسهامات الرياضيين العرب فى الجبر:



الحسن بن الهيثم (٩٦٥-١٠٣٩م)

- استخدام الاختزال للتعبير عن

المجهول، مثلاً استخدموا الحرف جـ للدلالة على الجذر التربيعى.

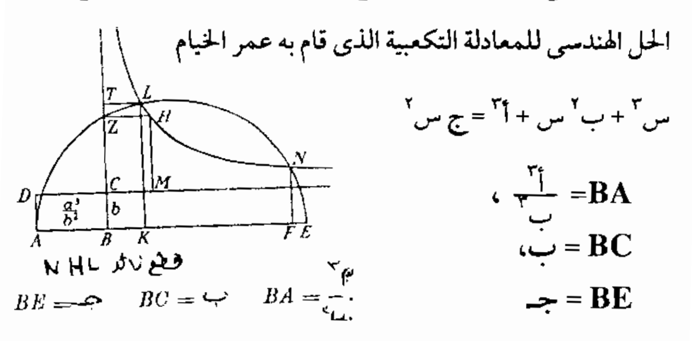


عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١)

- تصنيف المعادلات كما فعل الخوارزمى والخيام.
- وضع قوانين لحل معادلات الدرجة الثانية.
- استخدام طرق هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية (الخوارزمى) والثالثة (عمر الخيام).
- معالجة بعض أنواع المعادلات السيالة.
- حل معادلات من الدرجة الرابعة (البوزجانى والخيام).

- إيجاد قاعدة للأعداد المتحابة (ثابت بن قرة).

- التعامل بمتواليات حسابية وهندسية ومفكوك ذات الحدين وبدايات لما سمى بمثلث باسكال (الطوسى).



(٣-٧) الحضارة العالمية وتطور فى الجبر وفروع أخرى فى الرياضيات:

بعد ما يسمى بعصور الظلام (فى أوروبا) من منتصف القرن الخامس الميلادى وحتى القرن الحادى عشر بدأ علماء الغرب يترجمون ما وصل إليهم من ثمار الحضارة العربية الإسلامية بداية بما قام به الراهب جيربرت الذى درس فى المعاهد العربية التى كانت مزدهرة فى الأندلس وما ترجمه

جيرارد دى كريمونا (١١١٤ – ١١٨٧م) الذى يقرب من (٩٠) كتابا عربيا. على عتبة القرن الثالث عشر ظهر الرياضى الموهوب فيبوناتسى صاحب المتتابعة الشهيرة (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ...) والتى تنمذج الإشكالية التى وضعها بالمسألة «كم عدد أزواج الأرانب التى يمكن إنجابها من زوج واحد أصلى خلال عام إذا كان كل زوج ينجب كل شهر زوجا جديدًا، وهذا الزوج الجديد يصبح ولودا من الشهر الثانى من ولادته». ألف فيبوناتسى عام (١٢٢٥) كتابا عن المعادلات السيالة وكتبا أخرى فى الهندسة والمثلثات.

لم يشهد القرن الرابع عشر تطورًا كبيرًا فى الرياضيات بسبب الأمراض والحروب التى عمت أوروبا وإن ظهرت بعض التطورات مثل استخدام أسس كسرية فى الجبر وأفكار أولية عن اللانهاية.

مع بداية النهضة فى القرن الخامس عشر بدأت حركة ترجمة للكتب الإغريقية، كما بدأت الطباعة والنشر وازدهرت

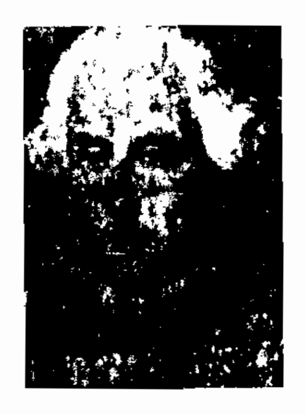
التجارة والملاحة وأعمال الفلك. وشهدت المدن الإيطالية ومدن أواسط أوروبا ازدهارًا فى الرياضيات. كما ظهر رياضيون مثل «موللر» و«شوكيه» الذى ألف كتابا فى الحساب عام (١٤٨٤) عالج عمليات حسابية بأعداد صحيحة وكسرية وغير نسبية واعترف بالأسس الموجبة والسالبة الصحيحة وقدم الجبر فى صور اختزالية. فى نفس القرن قدم «باسيولى» (١٤٤٥-١٥٠٩) كتابا ملخصا للرياضيات فى عصره يتضمن تطويرًا للرموز واستخدام حروفا مثل (أ) للدلالة على عملية الجمع وحرف (m) للدلالة على عملية الضرب والرمز (co) للدلالة على المجهول، (ce) للدلالة على $س^{٢}$، (ece) للدلالة على $س^{٤}$، والرمز (ae) للدلالة على التساوى. وقد كان أول ظهور للرمزين الحاليين للجمع والطرح (+ ، -) فى كتاب حساب ظهر عام (١٤٨٩) ألفه «ويدمان» ثم استخدم «فاندرهويك» الرمز (+، -) كعمليتين جبريتين عام (١٥١٤).

القرن السادس عشر شهد تطورًا كبيرًا فى الرموز الجبرية. كما ظهر رمز التساوى الحالى (=) لأول مرة وفى كتاب الجبر الذى ألفه رودلف عام (١٥٢٥) وقد ظهر رمز الجذر التربيعى ($\sqrt{\ }$) مأخوذًا عن الحرف الأول من كلمة radix التى تعنى الجذر باللاتينية. فى عام (١٥٤٤) ظهر كتاب الرياضى الألمانى ستيفل (Stifel) عن الأعداد النسبية وغير النسبية وربط بين متواليات حسابية وهندسية ممهدًا بذلك لظهور اللوغاريتمات. كما أعطى ستيفل مفكوكات لذات الحدين تصل إلى القوة (١٧)، كما تضمن معالجات فى مجال المعادلات والأعداد الحقيقية، كما رمز للمجهول بأحد الحروف، إلا أنه رفض الجذور السالبة للمعادلات. وقد انغمس «ستيفل» فى دراسة خواص الأعداد وغيبياتها ومدلولاتها فى نصوص دينية.

من الإنجازات الرياضية فى القرن السادس عشر اكتشاف الحل العام لمعادلات الدرجة الثالثة والرابعة على

بدى الرياضـى الإيطـالى فيرو (Ferro)، ولو أنه بعـد ذلك ادعى «نيكولو أوف بريسكيا» المشهور باسم «تارتاجليا» (أى المتلعثم) بأنه اكتشف حلا جبريا للدرجة الثالثة وأنه حل نوعين من معادلات الدرجة الثالثة بينما تمكن «فيرو» من حل نوع واحد فقط.

فى عام ١٥٤٥ نشر «كاردان» كتابه «الفنون العظيمة» وقدم فيه حلا للمعادلة التكعيبية بالصورة س٣ + م س = ن. كذلك حل «فرارى» تلميذ كاردان معادلة من الدرجة الرابعة وكانت طريقة فرارى هى اختزال معادلة الدرجة الرابعة إلى صورة من



لاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣)

الدرجة الثالثة ثم إلى الدرجة الثانية وقد عمل فى ذلك آخرون مثل فيتا وديكارت.

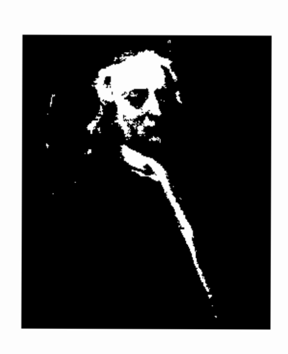
حاول أويلر عام ١٧٥٠ إيجاد حل عام لمعادلة الدرجة الخامسة ولكنه فشل كما فشل لاجرانج وغيره... إلى أن ثبت عدم وجود حل عام للدرجة الخامسة مما أدى إلى ظهور نظرية الزمرة (Group) على يدى جالوا (Galois) الذى قتل (عام ١٨٣٢م) وهو فى سن الحادية والعشرين. فى مبارزة غبية بسبب تنافسه على فتاة دُسَّت للقضاء عليه بسبب معارضته للملكية فى فرنسا.

ينسب لفيتا استخدامه للرموز z, y, x (س، ص ع) للمتغيرات (المجاهيل) والحروف c, b, a ... (أ، ب، جـ...) للثوابت.

مع بداية القرن السابع عشر شهدت أوروبا تطورًا مذهلاً فى الرياضيات تجاوبا مع الثورة الصناعية. ففى ذلك القرن اكتشف نابيير «اللوغاريتمات» لتيسير العمليات الحسابية كما قدم آلة حاسبة ونشر مع برجز (Brigs) جداول اللوغاريتمات للأساس عشرة. نافس نابيير فى اكتشاف اللوغاريتمات رياضى سويسرى يدعى برغى (Burgi)... فكرة نابيير كانت هندسية بينما فترة «برغى» جبرية. من



نابير (١٥٥٠-١٦١٧)



نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧)

الطـــريف أن فكـــرة اللوغاريتمـــات ابتكرت قبل استخدام الأسس.. كلمـــة لوغـــاريتم (Logarithm) مشتقة من كلمة إغريقية تعنى عدد نسبة (Ratio Number) وليس لها علاقة بكلمة (Algorithm) التـــى ابتدعـــت لتكـــريم الخـــوارزمى وبمعنـــى طريقة الخوارزمى والآن تعنى أى طريقة لإجراء عمليات رياضية.



جورج بوول (١٨١٥-١٨٦٤)

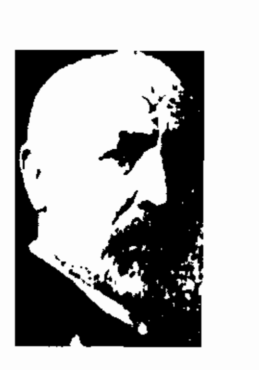
ديكارت (الذى ابتكر الهندسة الإحداثية) وضع أيضًا قاعدة الإشارات لتحديد طبيعة جذور المعادلات. الرياضى فرمات (١٦٠١-١٦٦٥) اشتغل بالهندسة التحليلية واقترح

الكثير من المنحنيات وأسس نظرية الأعداد الحديثة وعالج مشكلة الأعداد الأولية. إسحاق نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧) مبتكر قوانين الحركة ومكتشف قوانين الجاذبية ابتكر حساب التفاضل والتكامل ومفكوكات ذات الحدين وحل المعادلات عدديا. كان ليبنتز منافسا لنيوتن فى اكتشاف أو ابتكار التفاضل والتكامل كما اشتغل بالمنطق الرمزى الذى استكمله جورج بوول فى القرن التاسع عشر ثم هوايتهد وبرتراندراسل فى القرن العشرين متمثلاً فى نظرية المجموعات (sets) والجبر البوولى وأشكال فِن. الرياضى هاريوت قدم القاعدة التى تقول بأن كثيرة الحدود من الدرجة (ن) يكون لها (ن) جذرًا كما أنه أول من استخدم الرمزين (< ، >) للدلالة على أكبر من وأصغر. الرياضى أوتريد (Oughtred) قدم الرمز (x) لعملية الضرب والرمز (:) للتناسب، كما ابتكر حاسبة لوغاريتمية (عام ١٦٢٢) وقد طورها نيوتن ولكن أحدث مسطرة لوغاريتمية تعود للرياضى الفرنسى ماناهايم (١٨٣١-١٩٠٦). الرياضى فيرمات (١٦٠١-١٦٦٥) اشتغل بالهندسة الإحداثية ونظرية الأعداد. ويعتقد أن ليبنتز

(السابق الإشارة إليه) ابتكر نظرية المحددات فى معرض حله للمعادلات الآتية.

ينسب لأويلر (فى القرن الثامن عشر) استخدام الرمز د (س) [f (x)] للدلالة على الدالة وتبنيه لاستخدام الرمز Π (ط) للعدد المتسامى المعروف وأنه استخدم الرمز «سيجما» (Σ) والرمز ت (i) للعدد التخيلى. ومن أشهر اكتشافاته الرياضية العلاقة التى تربط بين أشهر الأعداد فى الرياضيات (صفر، ١، ط، ٢، ت وهى ($e^{ت ط}$ + ١ = صفر).

وقد اشتغل معظم الرياضيين فى القرن الثامن عشر بمعالجة التفاضل والتكامل ومحاولة فهم الكميات المتناهية فى الصغر وتفسير



كانتور (١٨٤٥-١٩١٨)

المشتقة (التفاضل) وينسب للأسقف الرياضى بيركلى (Berkly) تعريفه للمشتقة بأنها «شبح لدالة تختفى» وهو ما يتبين فى مشتقة حدودية مثل س٥ حيث مشتقاتها المتتالية هى (٥ س^{٤}، ٢٠ س^{٣}، ٦٠ س^{٢}، ١٢٠ س، ١٢٠، صفر). من الرياضيين فى ذلك القرن ماكلورين ودى موافر. وقد اشتغل دى موافر بالإحصاء والاحتمال وتوصل إلى النظرية المعروفة باسمه وهى (جتا س+ت جا س)^{ن}= جتا ن س+ت جا ن س كذلك اشتغل كارل جاوس بالنظرية الأساسية للجبر وبالأعداد المركبة، واهتم هاملتون بتوسيع فكرة المتجهات والرباعيات المجردة (Quaternions)، وزاد الاهتمام بالمعالجة



هاملتون (١٨٠٥-١٨٦٥)

المنطقية للرياضيات وتماسكها الداخلى وبنائها موحدة على

أسس منطقية وبنيات رياضية (Structures) مجردة، كما تمت دراسة الأعداد الحقيقية على يدى «ديديكند» (Dedekind) واللانهائيات على يد كانتور (كما أشرنا سابقًا).

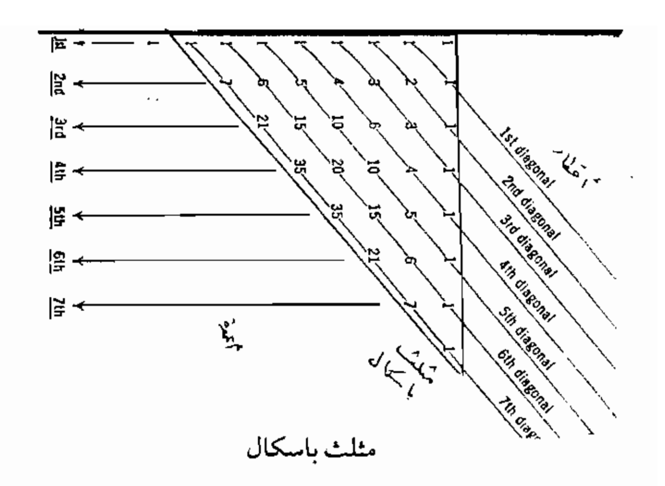
وقد شهد القرن العشرون تطورات عديدة فى الرياضيات تتصف بعمليات التجريد وجرى الاهتمام بفلسفة الرياضيات وظهور مجموعات فرنسية ودولية تهتم بالرياضيات المجردة مثل مجموعة «بورباكى» لإعادة صياغة علم الرياضيات بأسلوب منطقى متشدد انعكس فيما سمى بالرياضيات الحديثة التى طالت الرياضيات المدرسية فى المراحل قبل الجامعية.

كذلك خضعت مجموعة الأعداد الطبيعية لبناء منطقى متشدد على أساس مسلمات بيانو (Peano، ١٨٥٨-١٩٣٢).

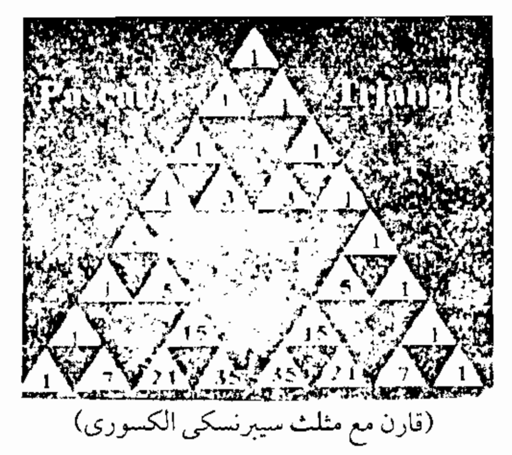
(٣-٨) مثلث باسكال... والاحتمالات:

قبل أن يتوهج حماسه الدينى السلبى مرة ثانية ويعكتف حتى النهاية، تحول باسكال إلى شاب اجتماعى يصادق النبلاء

ويرتاد الملاهى، ويلعب الميسر مدفوعا فى ذلك إلى الاهتمام - بالاشتراك مع الارستقراطى فرمات-بنظرية الاحتمالات التى تطورت فيما بعد إلى أداة رياضية فاعلة فى عمليات الأعمال والتأمين على الحياة (الاكتواريات) والكثير من الدراسات الاجتماعية والفيزيائية والبيولوجية، كما تفيد فى مفكوكات ذات الحدين... قدم باسكال ما يسمى «مثلث باسكال»... الذى يفيد فى حساب احتمالات إحداث تتبع توزيعات احتمالية معينة.



مثلث باسكال



(قارن مع مثلث سيرنسكى الكسورى)

على سبيل المثال:

لحساب احتمال نسبة عدد الأولاد فى عائلة مكونة من ستة أطفال، اذهب إلى القطر السادس فى مثلث باسكال حيث المجموع ٦٤:

يوجد احتمال $\frac{١}{٦٤}$ أن كل الأطفال سن نوع واحد (أولاد أو بنات)

يوجد احتمال $\frac{٦}{٦٤}$ أن يكون ولدا واحدًا وخمس بنات أو العكس

يوجد احتمال $\frac{١٥}{٦٤}$ أن يكون اثنان من نفس النوع، أربعة من النوع الآخر.

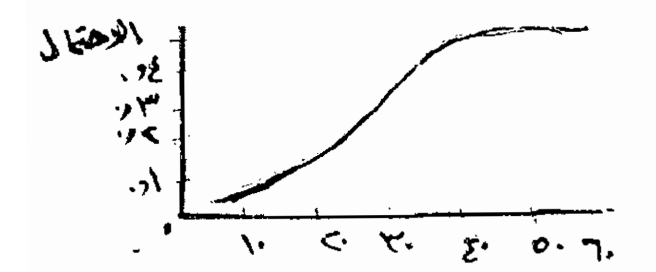
يوجد احتمال أن يكون هناك ثلاثة أولاد وأربع بنات.

وقد تطور العمل فى نظرية الاحتمالات باستخدام رياضيات متقدمة وابتكار توزيعات احتمالية متعددة. كما وضعت قوانين للاحتمالات النظرية والتجريبية لأحداث مشروطة ومتنافية بواسطة رياضيين كثيرين مثل دى موافر وجاوس.

من ناحية أخرى فإن كل صف فى المثلث يعبر عن معاملات مفكوك لذات الحدين مثلاً

$$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ٥ + ب^{٢}$$

$$(أ+ب)^{٣} = أ^{٣} + ٣ أ^{٢} ب + ٣ أ ب^{٢} + ب^{٣}$$



منحنى توزيع احتمالى لأن يشترك شخصان

أو أكثر فى نفس يوم الميلاد بحسب حجم العينة المأخوذة عشوائيًا

جدير بالإشارة أن بعض المؤرخين يرى أن نصير الدين الطوسى ثم عمر الخيام عرفا نوعا من هذا المثلث فى إطار

مفكوكات ذات الحدين. أعطى دى موافر (١٦٦٧-١٧٥٤) قانون التكامل التالى فى الاحتمالات:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-س^{2}} ء س = \sqrt{ط} / ٢$$

وقانون منحنى التكرار العادى (الجرسى) التالى:

$$ص = جـ e^{-أس^{2}} \quad \text{(حيث جـ، أ ثوابت)}$$

من الطريف أن إحدى القصص التى تروى عن دى موافر أنه لاحظ فى أيامه الأخيرة أنه فى كل يوم ينام ربع ساعة زيادة عن اليوم السابق. استخدم قانون المتواليات الحسابية وتنبأ بالموعد الذى ستكون مدة نومه تصل فيه إلى (٢٤) ساعة... وفى ذلك اليوم فى عام (١٧٥٤) انتقل إلى رحمة الله.

(٣-٩) جبر الفوضى/ الشواش (Chaos) وأثر الفراشة

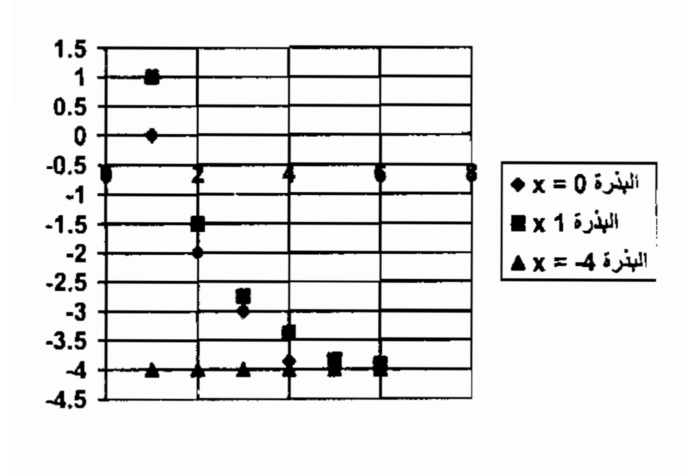
من بين المكتشفات العلمية الحديثة جدًا ظاهرة أطلق عليها العلماء «الفوضى» أو الشواش. والفوضى فى جوهرها -

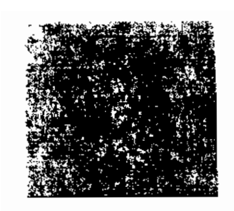
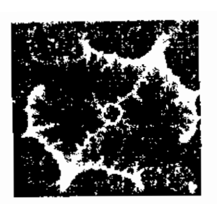
والتى تتضح فى مظاهر طبيعية كثيرة – تعنى رياضيا أن أى تغيرات طفيفة فى الحالة الابتدائية (Initial) لنظام أو نموذج رياضى يمكن أن تؤدى إلى انحرافات وتغيرات واسعة على طول الطريق فى النظام أو النموذج. يشبهون ذلك

أثرالفراشة

بما يسمى «أثر الفراشة» والذى يقول بأنه إذا حلقت فراشة فى البرازيل (مثلاً) فإن تحريك جناحيها للريح يمكن أن يتسبب فى عاصفة فى بلد بعيد مثل الصين. كان العلماء يجدون صعوبات فى التنبؤ بحالة الطقس مثلا وعزوا ذلك إلى عدم الدقة فى الخوارزميات والحسابات وحتى مخرجات الحواسيب.. ولكنهم تنبهوا أخيرًا إلى أن السبب وراء الانحرافات والنواقص فى التنبؤات هو ظاهرة الفوضى... رياضيات الفوضى تستخدم مفاهيم مثل البذرة والمدار والنقطة الثابتة والتكرارات الخطية واللاخطية... وتستخدم تمثيلات بيانية معقدة لا يمكن إنتاجها إلا عن طريق برمجيات

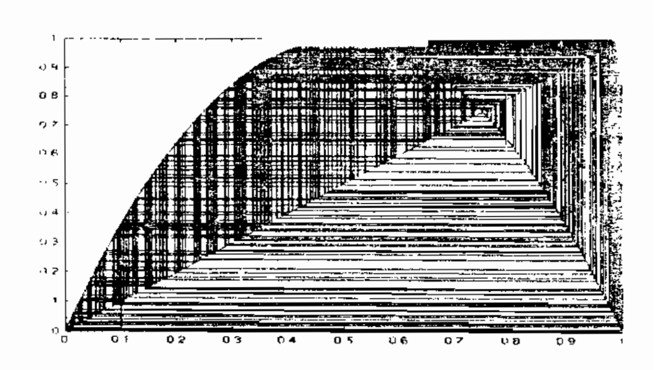
حاسوبية. تظهر الفوضى – وبعد تعويضات عديدة جدًا – فى معادلات تربيعية وأسية واكتوارية... وتتضح فى دوال رياضية وعلاقات أسية (كما فى حالة نمو السكان) ودوال تمثل ظاهرات حيوية (مثل دقات القلب) وطبيعية مثل الطقس... ودوال عادية ولوجيستية.. مبادئ فى جبر الفوضى أمكن تدريسها فى المرحلة الثانوية فى مدارس مصر تجريبيا. جبر الفوضى والهندسة الكسورية تنتمى إلى ما يسمى حاليًا بالرياضيات الديناميكية.



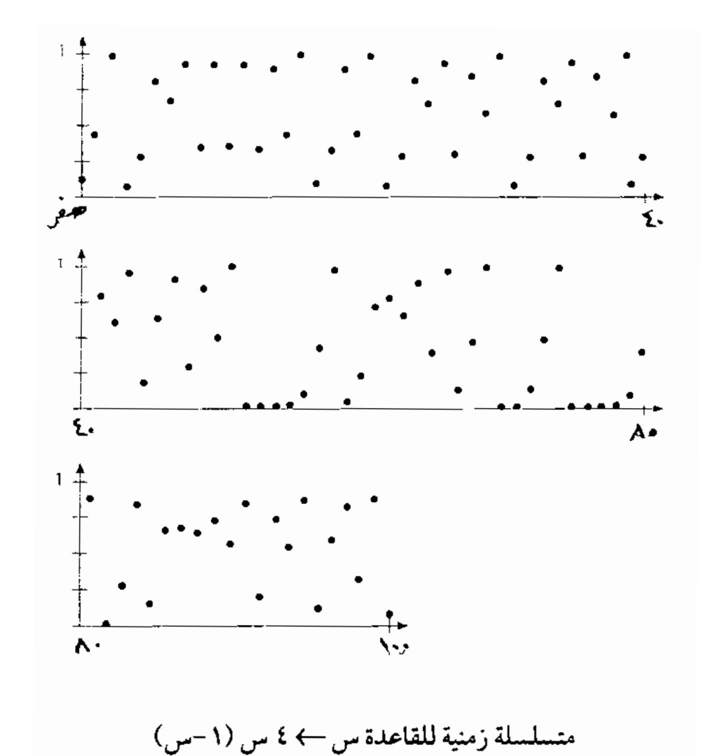




مجموعة من المتسلسلات الفوضوية المكونة من آلاف التعويضات للمعادلة

س ← ٤ س (١ – س) بدءًا بالذرة س = ١ , ٠



مصير البذرة س = ١ , ٠ فى متسلسلة س ← ٤ س (١ –س) الزمنية



متسلسلة زمنية للقاعدة س ← ٤ س (١-س)

لمائة تعويض يبدأ بالبذرة س = ١٢٣ , ٠

(لاحظ السلوك الفوضوى للمدار)

(رابعًا) : الحسبان : تكامل ثم تفاضل

(٤-٠) كلمة حُسبان (Calchus) مأخوذة عن كلمة لاتينية تعنى قطع الأحجار الصغيرة التى كانت تستخدم فى المعداد. وقد كان القرن السابع عشر حقبة زمنية اتسمت بالثراء الرياضى فى الاكتشافات والابتكارات... ولكن أعظم الانجازات كان فى ابتكار الحسبان مع نهاية القرن على يدى نيوتن وليبنتز وفيها حدث بينهما من مناقشات بل وتنازعات تنافسية إضافة إلى صراعات فكرية وفلسفية بشأن مفاهيم دقيقة خاصة بالنهاية والدالة ومعدل التغير وبالكميات المتناهية فى الصغر (Infinitismals) والتى شبهها الأسقف الرياضى بيركلى بالأشباح (Ghosts).

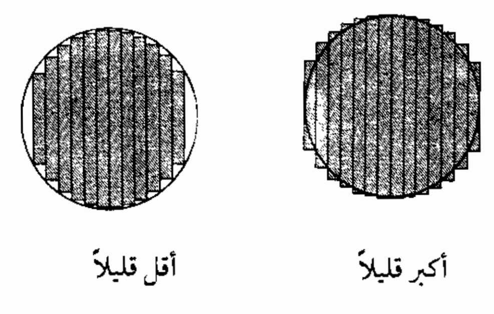
(٤-١) من هنا كانت البداية : طريقة الاستنفاد (Exhaustion)

على غير ما يحدث حاليًا فى كل المستويات وكل العالم فى دراسة الحسبان حيث تبدأ دراسته بالتفاضل ثم التكامل، فإن ابتكار هذا العلم بدأ بالتكامل ثم أتى التفاضل.

البداية – كما هو الحال – فى كل الرياضيات أو معظمها – تعود إلى الإغريق فى تناقضات زينو بالنسبة للتقسيم اللانهائى إلى جزئيات ذريرية لأى كمية وبالنسبة للحركة من حيث تقسيم الزمن إلى لحظات متناهية فى الصغر. ثم جاءت محاولات حساب مساحات وحجوم وأطوال أقواس. وقد استخدم الإغريق طريقة الاستنفاد والتى تستند إلى الفرض بأنه إذا كان يمكن حذف جزء من أى كمية لا يقل عن نصفها، ومن الباقى يحذف جزء آخر يقل عن نصفه... وهكذا، فعلى المدى الطويل يبقى جزء أقل من أى قيمة معينة من نفس النوع.. وذلك بأن يستنفدوا المساحة بين الدائرة مثلاً ومساحة مضلع منتظم داخلها.

السوفسطائى أنتيفون (٣٠٠ ق.م) المعاصر لسقراط قال بأنه إذا ضاعفنا عدد حروف مضلع داخل دائرة (بحيث رؤوسه تقع على محيط الدائرة)، فإن الفرق فى المساحة بين الدائرة والمضلع سوف يستنفذ فى النهاية... واستنتج من ذلك إمكانية تربيع الدائرة (!)، وكان ذلك يتعارض مع مبدأ أن الكميات قابلة للتقسيم بدون نهاية.. إلا أنها كانت بذرة فكرة

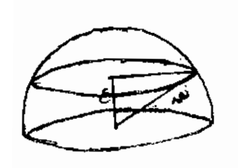
الاستنفاد وهى بذرة فكرة التكامل كنهاية تجميع أجزاء أو شرائح متناهية الصغر ينقسم إليها شكل يراد إيجاد طوله أو مساحته أو حجمه. وقد استخدم أرشميدس طريقة الاستنفاذ، كما استخدم طريقة أخرى أطلق عليها طريقة التوازن ولكنه لم يعتبرها برهانا مقبولاً لإيجاد حجم كرة... ولكن طريقة أرشميدس فى تقسيمه الشكل إلى شرائح أو طبقات (Layers) (مساحية أو حجمية بحسب طبيعة الشكل) متوازية و«نحيفة» جدًا.. واستخدمت بعد ذلك فى التكاملات بواسطة آخرين يمكن أن يكون ثابت بن قرة (٨٧٠ م) أحدهم.



أكبر قليلاً　　　　أقل قليلاً

(٤-٢) التكامل فى أوروبا :

نظرية التكامل وجدت حماسا قليلاً بعد أعمال أرشميدس... إلى أن تم ترجمة مخطوطات لأرشميدس وجدت فى القسطنطينية حيث ترجمت وطبعت عام (١٤٥٠م) وقد اهتم بعملية التكامل المهندس السويسرى «ستيفن» والرياضى الإيطالى فاليريو (١٥٥٢-١٦١٨) اللذين استخدما فكرة نهاية المجاميع بعد التقسيم إلى شرائط وشرائح «دقيقة» وتفاديا فكرة الاستنفاذ. الفلكى «كبلر» Kepler استخدم التكامل فى دراسة حركة الكواكب وإيجاد سعة براميل النبيذ... عن طريق تقسيم الدائرة إلى مثلثات صغيرة رأسها مركز الدائرة وتقسيم الكرة إلى مخروطات صغيرة رأسها مركز الكرة.



الإيطالى كافالـيرى (Cavalierie و١٥٩٨-١٦٤٧) استخدم طريقة أسماها طريقة "الغير القابل للانفصال (Indivisible)" فى حساب مساحات وحجوم بالتكامل.

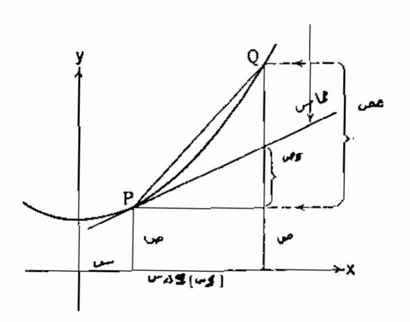
جون واليس (Wallis، ١٦١٦-١٧٠٣)، والذى كان أستاذ كرسى بجامعة أوكسفورد لمدة (٥٤) عاما أسهم فى أساسيات التكامل ودراسة العدد (ط)، كما قدم تفسيرات بيانية للجذور المركبة للمعادلة التربيعية الحقيقية.

بارو Barrow (١٦٣٠-١٦٧٧) كانت اسهاماته أكثر فى التفاضل وتنازل عن رئاسته لكرسى الرياضيات فى جامعة كامبردج لتلميذه الشاب نيوتن تقديرًا لعبقريته.

جدير بالإشارة أن نيوتن كان يرى التكامل كعملية عكسية للتفاضل ولكن ليبنتز كان يرى التكامل كنهاية مجاميع، وينسب لليبنتز أنه استخدم الحرف S للتعبير عن التكامل (من Summa) ثم تحول إلى الرمز المعروف حاليًا $\int$ (أو $\int$) القريب من S ... كما تقدم علم الحسبان على أيدى كثيرين لعل من أهمهم الفرنسى كوشى (Cauchy) ومن أتوا

بعده فى القرنين التاسع عشر والعشرين. كوشى كان يرى فى التفاضلات صناديق سوداء تحول مدخلات إلى مخرجات.

(٤-٣) الأشباح المتلاشية والتفاضل:



نشأ التفاضل (Differentiation) أو الاشتقاق مرتبطا بمشكلة إيجاد مماسات لمنحنيات وحساب قيم عظمى وصغرى لدوال رياضية بحتة أو دوال تنمذج مشكلات مجتمعية واقتصادية. وإذا كان نيوتن يعتبر – فى إجماع من المؤرخين – أنه مؤسس علم التفاضل، إلا أنه كان هناك منافس ومجادل كبير له هو ليبنتز... وهناك آخرون هم

إسهامات أولية مثل فرمات (١٦٢٩) فى بحثه عن المماسات وكبلر (١٦٠٠) فى بحثه عن قيم عظمى وصغرى.

نيوتن الذى ولد فى ليلة عيد الميلاد فى عام (١٦٤٢) وهو نفس العام الذى توفى فيه جاليليو.. له إسهامات عظيمة فى الميكانيكا وقوانين الحركة ونظرية ذات الحدين والتفاضل... وتولى مناصب رفيعة وألف كتاب (Principia)... توفى عن عمر ناهز (٨٤) سنة كلها دراسة وعمل وابتكارات جادة. وكان من بين إنجازاته الهامة إرساء قواعد للتفاضل من خلال طريقته التى سماها التدفق أو السيلان (Fluxion) التى كتبها عام (١٦٧١)، وفيها يعالج منحنيا يتولد بحركة متصلة لنقطة. الإحداثى السينى والصادى للنقطة المتحركة المولدة للمنحنى هى كميات متغيرة. وأسمى الكمية المتغيرة سريان أو طلاقة (Fluent) وسمّى معدل تغيرها التدفق وهو ما نطلق عليه حاليًا الاشتقاق أو التفاضل ورمز له بالرمز ($\dot{y}$) والذى نعبر عنه حاليًا بالرمز $\frac{ء ص}{ء ن}$ ($\frac{dy}{dt}$) حيث (ن) الزمن الذى يمكن فيه التملص منها.

عالج نيوتن مسألتين إحداهما إيجاد تفاضل أو مشتقات والأخرى حل «معادلات تفاضلية» وهى العملية العكسية. كما أنه استخدم أفكاره فى تطبيقات كثيرة لإيجاد نهايات عظمى وصغرى ومماسات لمنحنيات ومعاملات انحناء لمنحنيات ونقط انعطاف/ انقلاب، وتقعرات وتحدبات لمنحنيات... وأظهر قدرات فائقة فى تكاملات المعادلات التفاضلية... كما كان نيوتن محللا قديرًا وفيزيائيًا عظيمًا... رغم تواضعه الشديد واستنادا إلى تدينه القوى... ليبنتز ابتكر – مستقلا عن نيوتن – حسبانه بين عامى (١٦٧٣، ١٦٧٦) وهو الذى استخدم الرمز الحالى للتكامل، كما قدم الرموز ء س، ء ص (d x, dy)، δ، ووضع كثيرًا من قواعد التفاضل والتكامل الابتدائية (مثل إيجاد المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين).

وقد حدث جدال (ربما وصل إلى مرحلة الشجار) بين نيوتن وليبنتز وبالتالى بين مؤيدى كل منهما فيما يتعلق بإسهامات كل منهما فى التفاضل والتكامل.

وقد ساعد ابتكار الهندسة التحليلية فى تطور الحسبان، كما حدث تقدم فى نظرياته على يدى – كما أشرنا سابقًا – دى موافر ودى لوبينال صاحب النظرية المعروفة فى إيجاد النهايات)، وكثيرين مثل لابلاس وحاوس ووايرشتراس.

اعترض الرياضى اللاهوتى بيركلى (Berkly) الذى ولد فى أيرلندا عام (١٦٨٥) على مفهوم تدفقات (Fluxions) نيوتن واتهمها بالغموض وعدم الاتساق واعتبرها ليست حقيقية كلية لأن وجودها «لحظى» يكون فيها شىء يوجد ثم يختفى. وكان بركلى يعتقد أن الكميات المتناهية فى الصغر (Infinitismals) مفاهيم مهزوزة وأشباح تظهر وتتلاشى.

وايرشتراس (Weirstrass) الذى لم يحصل على درجة جامعية عمل معلما للرياضيات فى إحدى القرى أوائل القرن التاسع عشر، ولكنه اشتغل بالنهايات. قال بأنه ليس هناك حاجة أن نكتب المتسلسلة $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨}$ .. إلى مالانهاية، بل يكتفى بالقول أن نهاية المتسلسلة يساوى (٢) طالما أن الفرق بين المجموع والعدد (٢) أقل من أى قيمة ضئيلة إبسلون ($\in$).

(خامسًا) حساب المثلثات: قياس، فلك وتحليل رياضى

يقول دافيد سميث (Smith) فى كتابه «تاريخ الرياضيات» أن تاريخ حساب المثلثات يختلف بحسب المعنى الذى نراه فيه، حيث:

(١) حساب المثلثات كعلم تحليلى بدأ فى القرن السابع عشر (الميلادى).

(٢) حساب المثلثات بالمعنى الهندسى والمرتبط بالفلك، فإنه يعود إلى هيباركوس (Hiparchus)، (١٤٠ ق.م) وربما قبل ذلك.

(٣) حساب المثلثات بالمعنى اللفظى أى حساب قياسات المثلث فإنه يعود إلى الألفية الثالثة أو الثانية قبل الميلاد.

فى بردية أحمس (المصرية القديمة) توجد مسائل ترتبط بقياس الأهرامات بعضها يشير إلى «عدد النسبة» (Seqt) لزاوية والتى جرى تفسيرها بأنها تعنى جيب تمام الزاوية.

فى بابل هناك شواهد على قياسات للزوايات، كما جرى استخدام قياسات مثلثات فى الفلك (حوالى ٧٥٠ ق.م).

استخدم الإغريق قياسات المثلثات فى الفلك فيما أُطلق عليه «جنومون (Gnomon). طاليس قد استخدم «المثلثات» فى إيجاد ارتفاع الهرم مستخدما «الظل». وقد استخدمت قياسات المثلث فى الفلك. هيرون – مثلاً – وهو أحد رياضيى مدرسة الإسكندرية (٥٠ م) عالج قياسات المثلث وتعامل بدوال مثلثية فى دراسة المضلعات. وكذلك استخدمها مينالاوس فى معالجات المستوى وعلى الكرة، وتعامل معها وبها بطليموس فى كتاب «المجسط» أو الكتاب العظيم.

للعرب إسهامات كبيرة وعديدة لها أثرها الكبير فى ما قدمه الأوربيون فى علم حساب المثلثات،


مينالاوس

بالمعنى القياسى وبالمعنى التحليلى، وفى معالجة «حساب المثلثات» كعلم مستقل عن الفلك. استعمل العرب كلمة «الجيب» المأخوذة عن (Jyva) الهندية والتى ترجمت إلى (Sine) الغربية. كما أدخلوا المماس (الظل، ظا) كنسبة ضلعى القائمة، وتوصلوا إلى علاقات بين أطوال أضلاع مثلث وحبوب الزوايا «الموترة بتلك الأضلاع» فى مثلثات مستوية وكرِّية كما ظهر فى كتابات أبو الريحان البيرونى.

وقد حل بعض الرياضيين العرب المثلث القائم الزاوية، وأعطى نصير الدين الطوسى عدة طرق للحل. كذلك توصل العلماء العرب إلى كثير من العلاقات والمتطابقات المثلثية. كثير من الأعمال التى نسبت إلى علماء غربيين مثل ريجيومانتوس (Regiomantus) كانت من أعمال عربية. البتانى (أو بطليموس بغداد كما كان يطلق عليه) استخدم المثلثات فى القياسات الفلكية بمرصد بغداد (حوالى ٩٥٠ م).

وفى الغرب وضعت جداول للنسب المثلثية (حا، حتا، ظا

ومقلوباتها). من الأسماء المسهمة فى حساب المثلثات المستوية والكرية: فيتا (Vietta) وجيرارد (١٦٢٦) وكافاليرى وفينك (Fincke). بيتسكوس (Pitiscus) وضع كتابا عنوانه (Trigonometry) عام (١٥٩٥). نابيير استخدم رموزا فى معالجاته. برنولى اكتشف علاقات بين الدوال المثلثية واللوغاريتمية. أويلر أعطى القانون الذى بربـط نسـبا مثلثية بالأعـداد التخيلية: ($e^{\text{ت}\theta}$ = حتا θ + ت حا θ).

يذكر المؤرخ سميث أن حضارات عديدة مثل الصين والهند ساهمت فى تقدم حساب المثلثات، كما ساهمت فى المجالات الأخرى فى الرياضيات وتطورها.

(سادسًا) نظرة طائر لانطلاقة الرياضيات

يتبين من العرض السابق أن الأربعة قرون الماضية (بدءًا من القرن السابع عشر كانت هى فترة الانطلاق المتسارع والديناميكى لما يمكن تسميته بالرياضيات «الحديثة»، والذى يمكن «بنظرة طائر» أن نجمله بصورة عامة. من خلال:

(١) أشهر الرياضيين مثل:

كاردان (١٥٠١-١٥٧٦)، ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠)، وفرمات (١٦٠١-١٦٦٥)، نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧)، وليبتز (١٦٧٦-١٧١٦)، أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣)، برنولى (١٦٦٧-١٧٤٨)، لاجرانج (١٧٣٦-١٨١٣)، لابلاس (١٧٤٩-١٨٢٧)، جاوس (١٧٧٧-١٨٥٥)، أكنوول (١٧١٩-١٧٧٢)، سوفوا (١٧٧٧-١٨٥٥)، كوشى (١٧٨٩-١٨٥٧)، آبل (١٨٠٢-١٨٢٩)، هاملتون (١٨٠٥-١٨٦٥)، كيركمان (١٨٠٦-١٨٩٥)، ليستنج (١٨٠٨-١٨٨٢)، جالوا (١٨١١-١٨٣٢)، جراسمان

(١٨٠٩-١٨٧٧)، سلفستر (١٨١٤-١٨٩٧)، بوول (١٨١٥-١٨٦٤)، كايلاى (١٨٢١-١٨٩٥)، كيرتشوف (١٨٢٤-١٨٨٧)، جوردان (١٨٣٨-١٩٢٢)، ديدكند (١٨٣١-١٩١٦)، سوفيوس (١٨٤٢-١٨٩٩)، كانتور (١٨٤٥-١٩١٨)، شرويدر (١٨٤١-١٩٠٢)، فريجة (١٨٤٨-١٩٢٥)، كوول (١٨٦١-١٩٢٧)، ديكسن (١٨٧٤-١٩٥٤)، بيرنسانيد (١٨٥٢-١٩٢٧)، هيلبرت (١٨٦٢-١٩٤٣)... وغيرهم كثيرون.

(٢) مفاهيم رياضية حديثة لعل من أهمها:

المجموعات (sets بالإنجليزية أو Meng بالألمانية) والتناظر الأحادى (١-١) وأشكال فن (Venn) والثنائية (Duality) وقطوع ديدكند (Cuts) والدوال التحليلية وفكرة المتصل، ونظرية الزمرة (Group)، وخواص العمليات (تبديل وتجميع وتوزيع) والدوال، واللانهائيات بدءًا من أِلف صفر (aleph - not) وما وراء النهائيات (Transfinite) والتحويلات، والهندسات اللاإقليدية والتوبولوجى، والشبكات، والعقد، والتقدم فى العلوم الإحصائية

والاحتمالية والمنطق الرمزى، ونظرية المباريات (Games) والبرمجة الخطية وبحوث العمليات وضبط الجودة (Quality Control) والفراغات المجردة نونية البعد ورياضيات النسبية والكم...، ناهيك عن التطبيقات العملية المتجددة ونظريات تكنولوجيا المعلومات والاتصال والتقدم فى أبحاث الفضاء... وإرساء قواعد التفاضل والتكامل وغير ذلك مما سبق الإشارة إليه.



نيومان (نظرية المباريات)



فرمات

(سابعًا) العلماء لا يخترعون الحقيقة ولكن يكتشفونها

تتطور الرياضيات وسائر العلوم وتكتسب زخما بعد زخم وثراء بعد ثراء من إبداعات واكتشافات العلماء... من خبرات أفقية تُكْتَسب من المكان وخبرات رأسية يكتسبونها من الزمان الذى يعنى التغير والتطور.. ويرى عالم الفيزياء البريطانى روجرز بيرنوز (Pernose) أن العلماء لا يخترعون الحقيقة ولكنهم يكتشفونها.. وهنا يتساءل البعض «هل سيأتى اليوم الذى يكتشف فيه العلماء نظرية تفك كل أسرار وأحجية الكون؟» وإذا ما حدث ذلك فهل سيؤدى ذلك إلى توقف العلماء عن سعيهم فى البحث والاكتشاف؟... انشغل «جون هورجان» المحرر العلمى لمجلة (Scientific American) بمثل هذا السؤال وأجرى مقابلة بهذا الشأن مع «بيرنوز» فى صيف عام ١٩٨٩ الذى رأى أنه رغم البانوراما الوسيعة الذى يعيش فيها العلم الحديث، إلا أن العلم مازال قاصرًا... وأشار أن «الوعى الإنسانى» يمكن أن يكون مختبئًا

فى المساحة التى مازالت تفصل بين النظرية النسبية (Relativity) ونظرية الكم (Quantum) والتى حاول العلماء أن يمزجوا بينهما فى نظرية موحدة يمكنها أن تفسر الارتباط بين العقل والمادة... إن إحدى النظريات الحديثة الشائعة فى هذا الصدد هى النظرية المسماة «الشريط/ الخيط الفائق» (Super String) التى تفترض أو تتنبأ بوجود جسيم مادى على شكل خيط (كبديل عن الجسيم النقطة) يتحرك فى فضاء ذى عشرة أبعاد يتولد عنه كل أنواع المادة والطاقة فى الزمكان (Space-Time). العالِم «بيرنوز» يعتقد أنه حتى لو تحقق ذلك فإن ذلك سيكون عملاً نظريًا... لن يتمكن من تقديم الإجابة عن أسرار الكون... الفيلسوف «كارل بوبر» (Popper) أشار إلى أنه ينبغى أن نميز بين «الحقيقة» (Truth) التى هى موضوعية مطلقة وبين اليقينية (Certainity) التى هى ذاتية، وشكَّك «بوبر» فى الوصول إلى الحقيقة المطلقة وذكر أن العلماء لا ينتقدون أنفسهم بدرجة كافية... ويقول ساخرًا «فى جهلنا اللانهائى نحن جميعًا متساوون»!!

يذكرنا ذلك بموقف طريف فى الرياضيات، ذلك أن عالِم الرياضيات «ليبنتز» عندما أراد أن يشرح للملكة "صوفيا" ملكة بروسيا مفهوم «الكميات المتناهية فى الصغر» (فى قضية التفاضل والاشتقاق)، قالت له: «لا داعى أن توضح لى ذلك لأننى أرى هذا التناهى فى الصغر فى من هم حولى فى القصر الملكى»!!

وبعيدًا عن الخبرات الواقعية لجلالة الملكة وسخرية الفيلسوف "بوبر" فإن البحث عن الحقيقة وليس الحقيقة ذاتها هو الذى يجعل للحياة معنى، كما يجعل من قصة الرياضيات معزوفة لها معنى ومغنى.

مراجع

(1) Bergamini, D (1969): "Mathematics", Time – Life Books, Pocket Edition, U.S.A.

(2) Bunt, Jones and Bedient (1976): "The Historical Roots of Elementary Mathematics", Dover, N. Y.

(3) Choate et al (1999): "Fractal Gemetry", Key Curviculum Press", Cal. U.S.A.

(4) Clegg, B. (2000): "Infinity", Robinson, London.

(5) Coolidge, J. (1949): "The Mathematics Of Great Amateurs", Oxford Univ. Press., U.K.

(6) Devany and Choate (2000), "Chaos", Key Curriculum. Press, California, U.S.A.

(7) Eves, Howard (1953): "An Introductaion To The History of Mathematics", Rinehart, N. Y.

(8) Hooper, A. (1948), "Makters of Mathematies", Random House, U.S.A.

(9) Tasner et al (N. D.).: "Mathematics and the Imagination", Bell and Soms, London.

(10) Newman, Joner (1956): "The World of Mathematics" – 4 volumes, Simon, N. Y.

(11) Rucke, R. (1982): "Infinity and the Mind", Harvest Press, U. K.

(12) Smith, D. (1923, 1925): "History of Mathematics", Ginn, London.

(١٣) جون ماكليس – ترجمة الأحمد ودعبول ومراجعة عاشور (١٩٩٩): «العدد» عالم المعرفة – ٢٩١، الكويت.

(١٤) عبد العظيم أنيس ووليم عبيد (١٩٩٠): «مقدمة فى تاريخ الرياضيات»، وزارة التربية والتعليم، القاهرة.

(١٥) قدرى حافظ طوفان (١٩٩٠، ٢٠٠٠): «تراث العرب العلمى فى الرياضيات والفلك»، دار الشروق، القاهرة.

(١٦) كاظم وعبيد وشوق (١٩٧٠): «أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة»، دار المعارف، القاهرة.

(١٧) معصومة كاظم ووليم عبيد (١٩٨٥): «الهندسة اللاإقليدية»، دار النهضة العربية، القاهرة.

(١٨) محبات أبو عميرة (٢٠٠١): «الإبداع فى الرياضيات»، الدار العربية للكتاب، القاهرة.

(١٩) نبيل عمرو (١٩٩٤): «العرب وعصر المعلومات»، عالم المعرفة، ١٨٤، الكويت.

(٢٠) وليم عبيد (١٩٨٤): «كانتور واللانهاية»: مجلة الرياضيات (٤)، القاهرة.

(٢١) ـــــــ (١٩٨٨): «رياضيات الخيام»، مجلة الرياضيات (العدد ٥)، وزارة التربية والتعليم، القاهرة.

(٢٢) وليم عبيد (١٩٩٦): «ديكارت»، مجلة التقدم العلمى، العدد (١٤)، مؤسسة الكويت للتقدم العلمى، الكويت.

(٢٣) ــــــــــ (٢٠٠١): «هيباتيا عروس مدرسة الإسكندرية»، مجلة أمون، جامعة عين شمس – العدد الرابع، القاهرة.

(٢٤) ــــــــــ (٢٠٠١): «نهاية العلم: هذرمة صحفية أم نبوءة علمية»، فى مؤتمر نشر وتأصيل الثقافة العلمية فى المجتمع، مركز تطوير تدريس العلوم، جامعة عين شمس، القاهرة.